

Universidade Federal Fluminense

TIAGO DUARTE AMORIM

**Modelagem e Simulação Numérica da Dinâmica
Não-linear de Micro e Nanoressonadores sob a
Influência da Força de Casimir**

Volta Redonda

2013

TIAGO DUARTE AMORIM

**Modelagem e Simulação Numérica da Dinâmica
Não-linear de Micro e Nanoressonadores sob a
Influência da Força de Casimir**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia. Área de Concentração: Modelagem Computacional

Orientador:

André Gusso

Coorientador:

Wellington Gomes Dantas

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

Volta Redonda

2013

Modelagem e Simulação Numérica da Dinâmica Não-linear de Micro e Nanoressonadores sob a Influência da Força de Casimir

Tiago Duarte Amorim

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia. Área de Concentração: Modelagem Computacional.

Aprovada por:



Prof. André Gusso, D.Sc. / MCCT-UFF (Presidente)



Prof. Márcio Argollo de Menezes, D.Sc. / UFF



Prof. Gustavo Pamplona Rehder, D.Sc. / USP

Volta Redonda, 14 de Agosto de 2013.

Dedicatoria. À minha esposa Flávia e meus pais, Francisco e Carmen

Agradecimentos

A minha esposa Flávia pelo apoio para que esta pós graduação fosse concluída. Por suportar os momentos de minha ausência ao longo do curso.

Aos meus pais, Francisco e Carmen, que sempre me incentivaram, deram suporte e me ensinaram que o estudo é o melhor caminho.

A Deus pela ajuda nos momentos difíceis.

Aos meus orientadores, André e Wellington, por indicar o caminho para a realização deste trabalho

A todos os demais que contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho iremos apresentar a modelagem analítica e numérica de um microressonador e um nanoressonador em barra suspensa sob a ação da força de Casimir. Tais dispositivos eletromecânicos são utilizados como filtros seletivos de frequências e geradores de sinal, em substituição aos filtros e geradores de sinal eletrônicos. Assim, mostraremos a dedução da equação de movimento da barra e suas frequências naturais, introduziremos as forças dispersivas envolvidas na dinâmica da barra, entre elas as Forças de Casimir e Eletrostática. Posteriormente, tendo como base a teoria da dinâmica não-linear e caos, analisaremos os resultados obtidos da simulação numérica da equação de movimento de um microressonador e de um nanoressonador em barra suspensa.

Abstract

In this work we present analytical and numerical modeling of a clamped-clamped microresonator and a nanoresonator under the action of Casimir force. These electromechanical devices are used as RF filters and signal generators, replacing the electronic filters and signal generators. Thus, we show the derivation of the equation of motion of the bar and their natural frequencies, introduce dispersive forces involved in the dynamics of the bar, including the Casimir and Electrostatic Forces. Subsequently, based on the theory of nonlinear dynamics and chaos, we will analyze the results of the numerical simulation of the equation of motion of a clamped-clamped microresonator and a nanoresonator.

Palavras-chave

1. Microressonador
2. Força de Casimir
3. Dinâmica não-linear e Caos
4. Equação de movimento

Glossário

MEMS : Micro-Electromechanical Systems

NEMS : Nano-Electromechanical Systems

EDP : Equação Diferencial Parcial

EDO : Equação Diferencial Ordinária

RF : Rádio Frequência

Sumário

1	Introdução	11
2	Modelagem do ressonador tipo barra suspensa	16
2.1	A Equação Linear do Movimento de uma barra	16
2.2	Frequências Naturais e Modos de Vibração	19
2.3	Não-Linearidade Geométrica	21
2.4	O Método de Galerkin	25
2.4.1	Método de Galerkin aplicado a barra com não-linearidade geométrica	27
2.5	Redução a um sistema de parâmetros concentrados	28
2.6	Microbarra sob a ação de Força Eletrostática	30
3	A Força de Casimir	33
3.1	O Oscilador Harmônico Quântico	33
3.2	Quantização do Campo Eletromagnético	36
3.3	O Campo Eletromagnético no Espaço Livre	37
3.4	Efeito Casimir	39
3.4.1	Cálculo da Força de Casimir	39
3.4.2	Força entre dielétricos	40
3.4.3	Energia do ponto zero dos modos de superfície	42
3.5	Força de Casimir e Equação da barra	46
4	Dinâmica Não-Linear	47
4.1	Pontos Fixos e Estabilidade	49

4.2	Fluxo no Plano	51
4.2.1	Sistema linear de 2 dimensões	51
4.2.2	Classificação de Sistemas Lineares	54
4.3	Plano de Fase	57
4.3.1	Retratos de Fase	57
4.3.2	Pontos Fixos e Linearização	59
4.4	Ciclos Limite	62
4.4.1	Teorema de Poincaré-Bendixson	63
4.5	Bifurcações	64
4.5.1	Bifurcação de Hopf	64
4.6	Caos	66
4.6.1	Mapas de uma dimensão	67
4.6.2	Mapa logístico	68
4.6.3	Expoente de Lyapunov	71
4.6.4	Expoente de Lyapunov utilizando o método de Wolf	72
4.6.5	Mapa de Poincaré	73
5	Resultados para a dinâmica de Micro e Nanoressonadores	75
5.1	Oscilador de Duffing	76
5.2	Modelagem numérica de um microressonador	81
5.3	Modelagem Numérica do Nanoressonador	84
6	Conclusões e Trabalhos Futuros	88
6.1	Conclusões	88
6.2	Trabalhos Futuros	89
	Apêndice A	90

Sumário	x
Apêndice B	93
Apêndice C	99
Referências	103

Capítulo 1

Introdução

Microdispositivos são dispositivos constituídos de uma ou mais partes que possuam, pelo menos, duas de suas dimensões na escala submilimétrica (1 a $1000\mu\text{m}$). Da mesma forma nanodispositivos são dispositivos constituídos de uma ou mais partes, que possuam, duas de suas dimensões na escala submicrométrica (1 a 1000nm).

Os principais motivos para o desenvolvimento de micro e nanodispositivos estão ligados, num primeiro momento, a economia de espaço. Entretanto, pode-se enumerar ainda o menor custo de fabricação, menor consumo de energia, maior sensibilidade para a realização de medidas e ainda a abertura de possibilidades para observação de novos fenômenos físicos.

Uma subclasse dos micro e nanodispositivos são os chamados MEMS(Micro electro mechanical systems) e NEMS(Nano electro mechanical systems) que são compostos de partes mecânicas somadas a partes que utilizam normalmente a força eletrostática para atuação ou detecção. MEMS e NEMS, estão entre as principais áreas de desenvolvimento e pesquisa em ciência e tecnologia em virtude de sua multidisciplinaridade, o que leva vários pesquisadores de diferentes áreas a colaborarem no desenvolvimento de novas tecnologias, criarem novos dispositivos e investigarem a fundo a dinâmica não-linear de alguns dispositivos de modo a explorar as oportunidades nesse regime.

A maioria dos MEMS e NEMS possuem uma ou mais partes móveis. A dinâmica destas estruturas afeta diretamente as especificações e limitações de tais dispositivos [8]. Entretanto, entender o movimento de tais estruturas não é uma tarefa trivial. Algumas microestruturas quando movimentadas sofrem grande deformação quando comparadas às suas dimensões, gerando efeitos não-lineares.

As partes móveis de MEMS e NEMS são normalmente movimentadas por uma força

eletrostática entre placas paralelas, que por sua definição é uma força não-linear. Essa e várias outras fontes de não-linearidades em MEMS e NEMS tem um importante papel na dinâmica de tais dispositivos, fazendo com que a teoria linear seja inadequada para aplicação ao modelo.

MEMS e NEMS são basicamente sensores ou atuadores. Exemplos de sensores são os sensores de inércia (acelerômetros e giroscópios), sensores de pressão, gás e massa, sensores de temperatura, sensores de força e sensores de humidade. Para quase toda grandeza física há um sensor MEMS para realizar a medição. Exemplos de atuadores são os microespelhos que refletem luzes nos projetores de vídeo, switches e filtros de RF.

Um exemplo de dispositivo muito utilizado atualmente é o acelerômetro, exemplificado na Fig. 1.1, e presente em controles de videogames e celulares. Na Fig. 1.1, podemos observar que o acelerômetro é composto de uma massa presa por nanomolas de 50nm e de braços interdigitais com espaçamentos de 150nm que fazem o papel de capacitores de placas paralelas. O movimento da massa faz com que a capacitância se altere entre os braços, fazendo com que o movimento possa ser detectado.

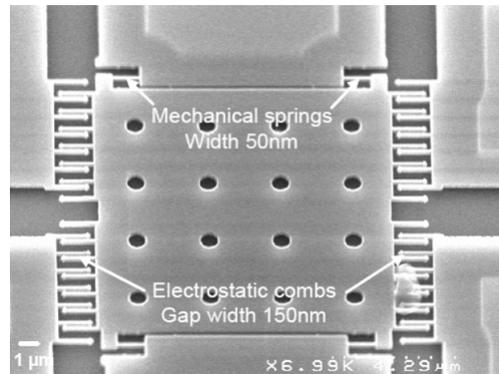


Figura 1.1: Sensor de inércia: acelerômetro.

Ressonadores são uma outra classe de MEMS, compostos por estruturas que vibram, geralmente em ressonância. A estrutura pode ser um cantilever (barra com uma extremidade engastada e a outra extremidade livre) ou uma ponte (barra engastada nas duas extremidades), ambas acompanhadas de um substrato fixo (Fig. 1.2) atuados por força eletrostática entre as placas. Ressonadores podem ainda ter outros formatos como discos ou diafragmas[14], por exemplo. No caso das aplicações como sensores uma mudança no parâmetro a ser medido como pressão, temperatura, força e aceleração, altera a rigidez da estrutura e induz tensão axial. Isso faz com que a frequência de ressonância seja alterada e é através da quantidade de frequência desviada que podemos medir os parâmetros físicos citados anteriormente, por exemplo.

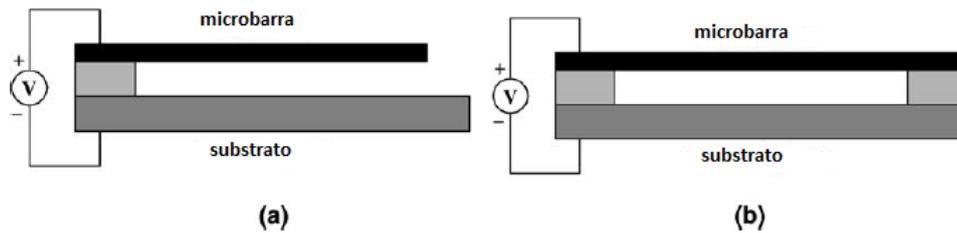


Figura 1.2: (a) Ressonador tipo cantilever e (b) Ressonador tipo ponte. Fonte:[10]

Outras aplicações de ressonadores são a geração de sinais de referência (clock) e filtros de seleção de frequência, sendo que alguns microressonadores utilizados como filtros e desenvolvidos em laboratório, já obtiveram fatores de qualidade maiores que 10.000 em frequências de aproximadamente 1.5GHz [14] ou até mesmo fatores de qualidade em torno de 177000 para frequências de 19KHz [16]. Outros sistemas que utilizam estruturas em ressonância vem sendo desenvolvidos por pesquisadores como nanosensores de massa com sensibilidade na casa dos attogramas ($10^{-18}g$) conforme ilustrado pela Fig. 1.3 [7].

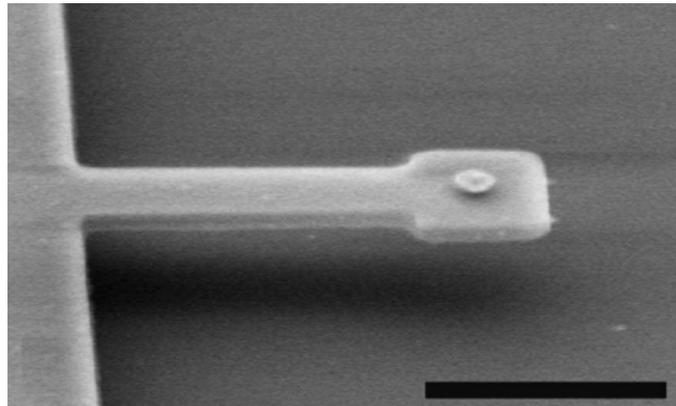


Figura 1.3: Sensor de massa. Fonte:[7]

Devemos mencionar que as distâncias entre o substrato e a microbarra de microressonadores ou nanoressonadores vem diminuindo com o passar dos anos a ponto de obterem separações de 80nm [16] conforme Figs.1.5 e 1.6, ou ainda tão pequenas quanto 32nm [20] conforme Fig.1.4. Em virtude da diminuição destas distâncias efeitos que antes eram desprezíveis ou passíveis de serem ignorados passam a ser obrigatórios para a equação do movimento. Como exemplo, citamos a Força de Casimir que será considerada na presente dissertação.

O problema proposto na presente dissertação consiste na modelagem numérica da dinâmica de um microressonador do tipo ponte (barra suspensa) sob a ação de forças

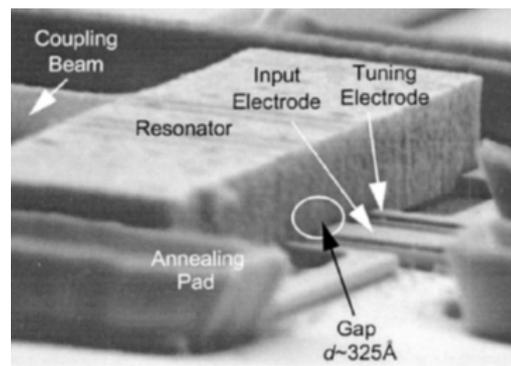


Figura 1.4: Ressonador com separação de 32nm. Fonte:[20]

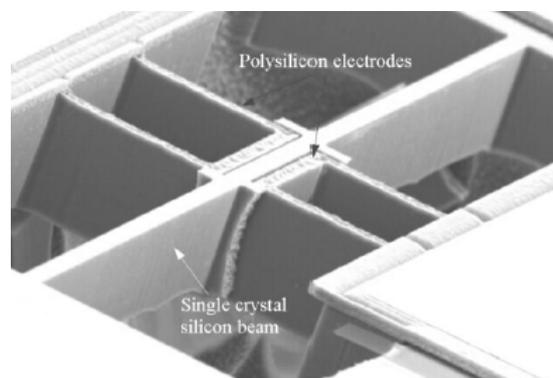


Figura 1.5: Ressonador com separação de 80nm. Fonte:[16]

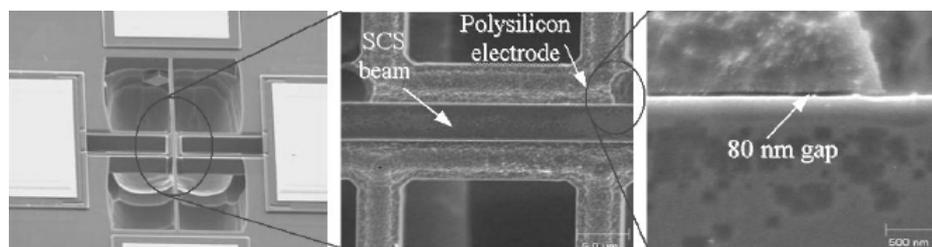


Figura 1.6: Aproximação da área do eletrodo - separação de 80nm. Fonte:[16]

eletrostáticas e de Casimir. Como espera-se que o ressonador a ser modelado realizará grandes oscilações quando comparado com sua espessura, temos que a dinâmica deve ser analisada com uma Teoria Não-linear. Alguns trabalhos de microressonadores com a Força de Casimir já foram realizados como em [17] e posteriormente em [10], entretanto com o sistema reduzido a massa-mola e com um grau de liberdade. Mais recentemente, foi descoberto caos em sistemas forçados [2], do tipo que iremos modelar, de tal sorte que realizaremos a investigação de um possível comportamento caótico nos dispositivos modelados.

Assim, no Capítulo 2 iremos demonstrar o modelo teórico da uma barra suspensa, definir a sua equação do movimento, adicionar as forças envolvidas no caso real e por último aplicaremos o método de Galerkin com o intuito de transformamos a EDP do movimento da barra em uma EDO e simularmos a dinâmica numericamente.

No Capítulo 3 apresentaremos a Força de Casimir que deve ser considerada para duas placas separadas por pequenas distâncias conforme ocorre com microressonadores, e adicionaremos tal força a equação do movimento da barra definida no Capítulo 2.

No Capítulo 4 apresentaremos ferramentas para análise do comportamento não-linear da dinâmica do sistema. Veremos o significado dos retratos de fase de um sistema, bifurcações, pontos fixos e estabilidade. Além disso, demonstraremos como avaliar se um sistema tem comportamento caótico ou não.

De posse da equação do movimento do microressonador definida nos Capítulos 2 e 3, e utilizando as ferramentas demonstrados no Capítulo 4, no Capítulo 5 iremos simular numericamente a dinâmica de um microressonador de barra suspensa, e verificaremos se há regime caótico em algumas faixas de parâmetros do sistema.

Capítulo 2

Modelagem do ressonador tipo barra suspensa

No presente capítulo vamos apresentar o modelo teórico de uma barra suspensa empregada no tipo de ressonador que buscamos modelar. Primeiramente, iremos derivar a equação de movimento da barra, incluir as forças envolvidas, e calcular suas frequências naturais e modos de vibração. Em seguida determinaremos a contribuição da não-linearidade geométrica, que é importante no caso de grandes oscilações de barras bi-engastadas como consideramos serem os micro e nanoressonadores e, por último, apresentaremos o Método de Galerkin que nos permite transformar uma EDP em uma EDO para posterior simulação numérica.

2.1 A Equação Linear do Movimento de uma barra

Considere a barra da figura 2.1, onde $w(x, t)$ é a deflexão da posição x no instante t , l é o comprimento da barra, ρ é a densidade uniforme da barra, A é a área da seção transversal da barra, E é o módulo de Young e $I(x)$ o momento de inércia¹. A barra ainda está sujeita a ação de uma força axial $N(x, t)$ e uma força distribuída $F(x, t)$.

Analisando um pequeno elemento dx da barra conforme diagrama do corpo livre da Figura 2.2 temos que M se refere ao momento fletor, V a força cisalhante e θ é o ângulo de deflexão da barra em relação a horizontal ($\theta = \partial w / \partial x$).

Assumimos aqui que as variáveis no lado esquerdo do diagrama de forças sofrem uma

¹O momento de inércia aqui é uma propriedade geométrica de uma área que reflete como seus pontos são distribuídos em relação a um eixo arbitrário. Assim o momento de inércia de uma forma arbitrária em relação a um eixo BB é definida por $M_{BB} = \int_A \rho^2 dA$, onde dA é um diferencial de área e ρ é a distância do eixo BB ao elemento dA .

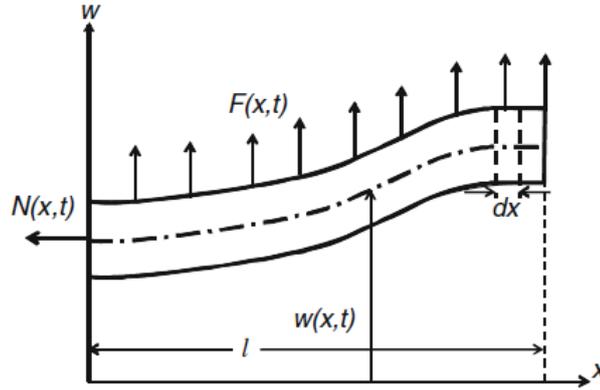


Figura 2.1: Desenho da barra a ser modelada. Fonte:[8]

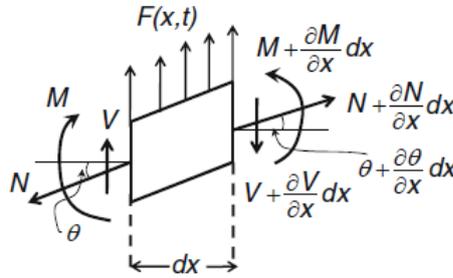


Figura 2.2: Diagrama de forças. Fonte:[8]

pequena variação quando são deslocadas para o lado direito do elemento, a uma distância dx , e que as variáveis são expandidas em série de Taylor até a primeira ordem em dx .

Aplicando a Segunda Lei de Newton às forças na direção vertical temos que:

$$V - \left(V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right) + F dx - N \frac{\partial w}{\partial x} + \left(N + \frac{\partial N}{\partial x} dx \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) = \rho A dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (2.1)$$

Ignorando os termos de alta ordem em dx e simplificando temos:

$$-\frac{\partial V}{\partial x} + F + \frac{\partial}{\partial x} \left(N \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (2.2)$$

Aplicando agora a Segunda Lei de Newton às forças na direção horizontal e assumindo que o ângulo de deflexão θ é pequeno em relação a horizontal temos que,

$$N + \frac{\partial N}{\partial x} dx - N = 0 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 0. \quad (2.3)$$

Considerando a soma dos momentos tendo como referência o lado esquerdo da Figura

2.2 temos que,

$$M + \frac{\partial M}{\partial x} dx - M - \left(V + \frac{\partial V}{\partial x} \right) dx + (F dx) \frac{dx}{2} = 0. \quad (2.4)$$

Ignorando os termos de ordem mais alta e simplificando chegamos a

$$V = \frac{\partial M}{\partial x}. \quad (2.5)$$

Obtidas as relações das equações (2.2), (2.3) e (2.5), devemos levar em consideração a relação entre o momento fletor e o raio de curvatura da barra R devido a deflecção

$$M = \frac{EI}{R}. \quad (2.6)$$

O raio de curvatura da barra pode ser expresso por

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^{3/2}}{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}. \quad (2.7)$$

Considerando um pequeno ângulo de deflecção $\frac{\partial w}{\partial x} \ll 1$, a Equação 2.7 é simplificada para

$$R = \frac{1}{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}. \quad (2.8)$$

Substituindo a Eq. 2.8 na Eq.2.6 chegamos a forma básica da Equação de Euler-Bernoulli

$$M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (2.9)$$

Substituindo agora a Eq. 2.9 em 2.5 e posteriormente em 2.2 e 2.3 temos que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = F. \quad (2.10)$$

A equação 2.10 descreve o movimento da barra suspensa. Entretanto considerando que não há forçamento e amortecimento, que a barra é uniforme e que a carga axial é zero a Eq. 2.10 se resume a

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (2.11)$$

a qual analisaremos em seguida.

2.2 Frequências Naturais e Modos de Vibração

Determinar as frequências naturais e os modos de vibração das microbarras é de suma importância para a fabricação dos dispositivos que as compõem, uma vez que revelam a faixa de funcionamento dos dispositivos, suas restrições e permite a calibração dos dispositivos como ressonadores e filtros de RF [8].

Voltando à Eq. 2.11 temos que, para resolvê-la, utilizaremos o método da separação das variáveis. Assim, considerando que temos uma solução espacial $\phi(x)$ multiplicada pela solução no tempo na forma $e^{i\omega t}$, onde ω é a frequência natural da barra e ϕ é o modo de vibração correspondente, temos que a solução da Eq. 2.11 pode ser escrita na forma:

$$w(x, t) = \phi(x)e^{i\omega t}. \quad (2.12)$$

Substituindo a Eq. 2.12 na Eq.2.11, dividindo por $e^{i\omega t}$ e simplificando temos

$$\phi'''' - \beta^4 \phi = 0, \quad (2.13)$$

onde ϕ'''' denota a derivada de quarta ordem em relação a x e β é expresso por²

$$\beta^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI}. \quad (2.14)$$

A expressão da Eq. 2.14 pode ser reescrita em termos de ω

$$\omega = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \beta^2. \quad (2.15)$$

Introduzindo a variável não dimensional $\omega_{non} = \beta^2 l^2$ podemos reescrever a equação como

$$\omega = \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \omega_{non}. \quad (2.16)$$

A variável ω_{non} é um número não dimensional da frequência natural da barra que, por sua vez, depende das condições de contorno.

A Eq. 2.13 com as corretas condições de contorno pode ser resolvida analiticamente. Assim, a Eq. 2.13 tem soluções do tipo

$$\phi(x) = A_0 e^{sx}, \quad (2.17)$$

²Usaremos ' para denotar a derivada com relação à variável x e ' para a derivada com relação a t

onde A_0 e s são constantes desconhecidas. Substituindo a Eq.2.17 em 2.13 e simplificando temos a relação

$$s^4 - \beta^4 = 0. \quad (2.18)$$

Resolvendo a Eq. 2.18 temos

$$s = \pm\beta; s = \pm i\beta. \quad (2.19)$$

Das equações 2.17 e 2.19 e utilizando o princípio da superposição temos que a solução total de ϕ é

$$\phi(x) = A_1 e^{\beta x} + A_2 e^{-\beta x} + A_3 e^{i\beta x} + A_4 e^{-i\beta x}, \quad (2.20)$$

onde A_i são constantes de integração, que são determinadas pelas condições de contorno da barra.

Para uma barra com suas extremidades fixas, como queremos analisar, temos que as condições de contorno são:

$$\phi(0) = 0; \phi'(0) = 0 \quad (2.21)$$

$$\phi(l) = 0; \phi'(l) = 0. \quad (2.22)$$

Usando essas condições de contorno na Eq. 2.20 chegamos ao sistema de equações que podem ser representadas na matriz abaixo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cos(\beta l) & \sin(\beta l) & \cosh(\beta l) & \sinh(\beta l) \\ -\sin(\beta l) & \cos(\beta l) & \sinh(\beta l) & \cosh(\beta l) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \{0\}. \quad (2.23)$$

Fazendo o determinante acima igual a zero temos a equação característica

$$\cos^2(\beta l) - 2 \cos(\beta l) \cosh(\beta l) + \cosh^2(\beta l) + \sin^2(\beta l) - \sinh^2(\beta l) = 0$$

que se reduz a

$$1 - \cos(\beta l) \cosh(\beta l) = 0. \quad (2.24)$$

A Eq. 2.24 pode ser resolvida numericamente de onde obtemos, por exemplo, as quatro primeiras raízes

$$\beta_1 l = 4.73; \beta_2 l = 7.85; \beta_3 l = 10.996; \beta_4 l = 14.14.$$

Então, temos que as quatro primeiras frequências naturais não dimensionais são

$$\omega_{non,1} = 22.373; \omega_{non,2} = 61.673; \omega_{non,3} = 120.90; \omega_{non,4} = 199.859.$$

Podemos encontrar, ainda, os modos de vibração substituindo as raízes βl nas equações contantes na matriz 2.23 de onde obtemos

$$\phi_1 = 1.01781 \cos[4.73004x] - 1.01781 \cosh[4.73004x] - \sin[4.73004x] + \sinh[4.73004x]$$

$$\phi_2 = 0.999223 \cos[7.8532x] - 0.999223 \cosh[7.8532x] - \sin[7.8532x] + \sinh[7.8532x]$$

$$\phi_3 = 1.00003 \cos[10.9956x] - 1.00003 \cosh[10.9956x] - \sin[10.9956x] + \sinh[10.9956x]$$

$$\phi_4 = 0.99999 \cos[14.1372x] - 0.99999 \cosh[14.1372x] - \sin[14.1372x] + \sinh[14.1372x] \quad (2.25)$$

Representando em um gráfico os modos de vibração descritos anteriormente e as respectivas frequências naturais temos

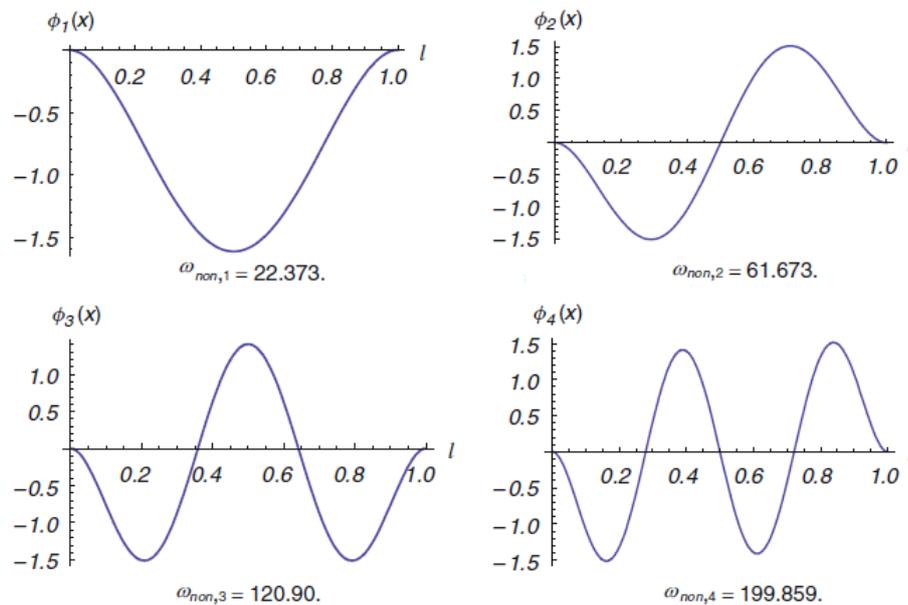


Figura 2.3: Modos de vibração e frequências naturais dos 4 primeiros modos de uma barra fixa em suas extremidades. Fonte:[8]

2.3 Não-Linearidade Geométrica

Vejam agora a dedução da equação não-linear do movimento de uma barra com as extremidades fixas, o que induz a não-linearidade geométrica. Esta é uma importante fonte de não-linearidade em MEMS e NEMS e ocorre quando temos uma grande deflexão

da barra em relação a sua espessura. Tal deflecção induz tensão axial e altera a rigidez da barra de uma forma não-linear.

Nesta seção assumiremos que as propriedades da barra E , I , A e ρ são constantes. Não-linearidades devido à inércia e à curvatura da barra são ignoradas visto que são bem menores que a não-linearidade geométrica.

Assim, a Figura 2.4 representa um segmento da barra antes da deformação (dx) e depois da deformação (ds). O deslocamento axial é representado por $u(x, t)$ e o deslocamento vertical por $w(x, t)$. Note que agora é considerado o deslocamento axial.

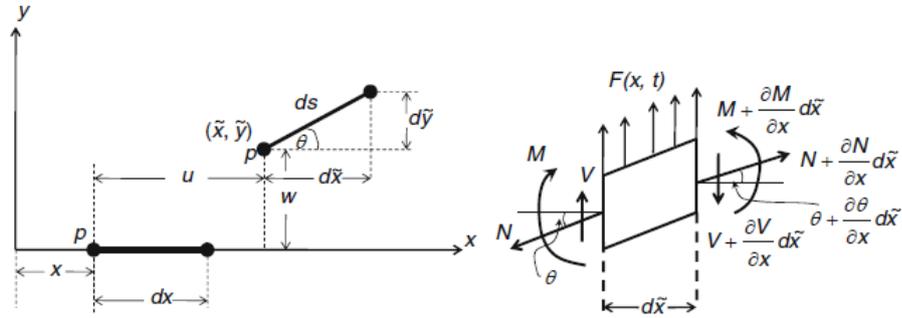


Figura 2.4: Segmento da barra e Diagrama de Forças. Fonte:[8]

Considerando que as propriedades da barra são uniformes a posição do ponto p após a deformação é expressa por

$$\tilde{x} = x + u; \tilde{y} = w. \quad (2.26)$$

A variação da posição do elemento deformado é expressa pela derivada da equação anterior

$$d\tilde{x} = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx = dx(1 + u'); \quad d\tilde{y} = \frac{\partial w}{\partial x} dx = w' dx. \quad (2.27)$$

Utilizando a Eq. 2.27 podemos definir o tamanho da deformação por

$$ds = \sqrt{d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2} = \sqrt{(1 + u')^2 + w'^2} dx. \quad (2.28)$$

A deformação axial ϵ é definida como a mudança do comprimento do elemento da barra

$$\epsilon = \frac{ds - dx}{dx} = \sqrt{(1 + u')^2 + w'^2} - 1. \quad (2.29)$$

Expandindo ϵ em série de Taylor até a segunda ordem temos

$$\epsilon = u' + \frac{w'^2}{2} + \dots \quad (2.30)$$

Da Figura 2.4 podemos obter as seguintes relações para o ângulo de deformação

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{d\tilde{y}}{ds}, \quad \operatorname{cos}\theta = \frac{d\tilde{x}}{ds}. \quad (2.31)$$

Substituindo as Eqs. (2.27) e (2.28) na Eq.(2.31) nos dá

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{w'}{\sqrt{(1+u')^2 + w'^2}}; \quad \operatorname{cos}\theta = \frac{1+u'}{\sqrt{(1+u')^2 + w'^2}}. \quad (2.32)$$

Expandindo em série de Taylor e mantendo até a terceira ordem em w' temos

$$\operatorname{sen}\theta \approx w' - u'w' - \frac{w'^3}{3} + \dots; \quad \operatorname{cos}\theta \approx 1 - \frac{w'^2}{2} + \dots \quad (2.33)$$

Analisando a carga axial de lado direito do elemento da barra, onde o ângulo de deformação é $\theta + \theta'd\tilde{x}$ conforme a Figura 2.4, temos as seguintes relações expandidas em série de Taylor até a primeira ordem:

$$\operatorname{cos}(\theta + \theta'd\tilde{x}) \approx \operatorname{cos}\theta + (\operatorname{cos}\theta)'d\tilde{x} + \dots \quad (2.34)$$

$$\operatorname{sen}(\theta + \theta'd\tilde{x}) \approx \operatorname{sen}\theta + (\operatorname{sen}\theta)'d\tilde{x} + \dots \quad (2.35)$$

Considerando o diagrama do corpo livre da Figura 2.4 e utilizando a Segunda Lei de Newton na direção horizontal temos

$$(N + N'd\tilde{x})\operatorname{cos}(\theta + \theta'd\tilde{x}) - N\operatorname{cos}\theta = \rho A d\tilde{x}\ddot{u}. \quad (2.36)$$

Substituindo a Eq.2.34 na Eq.2.36 e retirando os termos de mais alta ordem em $d\tilde{x}$ temos

$$(N\operatorname{cos}\theta)' = \rho A\ddot{u}. \quad (2.37)$$

Aplicando a Segunda Lei de Newton na direção vertical nos leva a

$$V - (V + V'd\tilde{x}) + Fd\tilde{x} - N\operatorname{sen}\theta + (N + N'd\tilde{x})\operatorname{sen}(\theta + \theta'd\tilde{x}) = \rho A d\tilde{x}\ddot{v}. \quad (2.38)$$

Substituindo a Eq. 2.35 na equação anterior e retirando os termos de mais alta ordem em $d\tilde{x}$ temos

$$-V' + F + (N\operatorname{sen}\theta)' = \rho A\ddot{v}. \quad (2.39)$$

As relações de momento e curvatura da barra apresentadas nas Eqs. 2.4-2.9 permanecem inalteradas e se aplicam a este caso. Apresentamos agora a relação entre a deformação

e tensão axiais utilizando a Eq. 2.30

$$N = EA\epsilon = EA \left(u' + \frac{w'^2}{2} + \dots \right). \quad (2.40)$$

Substituindo a Eq. 2.40 na Eq. 2.37, e a Eq. 2.9 e a Eq. 2.40 na Eq. 2.39, e retirando os termos de ordem mais alta temos, respectivamente,

$$\rho A \ddot{u} - EA u'' = EA \left(\frac{w'^2}{2} \right)' \quad (2.41)$$

$$\rho A \ddot{w} + EI w'''' = EA \left(u' w' + \frac{w'^3}{2} \right)' + F. \quad (2.42)$$

As equações 2.41 e 2.42 são duas equações diferenciais parciais não-lineares e acopladas que representam a dinâmica da barra com a não-linearidade geométrica, sendo a primeira na direção axial e a segunda na direção transversal.

Podemos realizar uma simplificação no caso de barras delgadas de pequeno raio de rotação $r = \sqrt{I/A}$. Neste caso, a frequência axial é muito maior que a frequência transversal, de modo que o termo $\rho A \ddot{u}$ da Eq. 2.41 pode ser retirado. Assim, a Eq. 2.41 fica reduzida a

$$u'' = - \left(\frac{w'^2}{2} \right)'. \quad (2.43)$$

A Eq. 2.43 nos mostra que a deformação axial é da mesma ordem que a deformação transversal. Integrando duas vezes a Eq. 2.43 em relação a x temos:

$$u' = - \frac{w'^2}{2} + c_1(t) \quad (2.44)$$

e

$$u = \frac{1}{2} \int_0^x w'^2 dx + c_1(t)x + c_2(t), \quad (2.45)$$

onde $c_1(t)$ e $c_2(t)$ são constantes de integração. Para encontrar estas constantes, utilizamos as condições de contorno de uma barra fixa nas duas extremidades de modo a ter uma igualdade com o ressonador a ser modelado, ou seja,

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0. \quad (2.46)$$

Substituindo as condições da Eq. 2.46 na Eq. 2.44 e na Eq.2.45 temos que c_1 e c_2 se resumem a:

$$c_1(t) = \frac{N_1(t)}{EA} + \frac{1}{2l} \int_0^l w'^2 dx; \quad c_2(t) = 0. \quad (2.47)$$

Substituindo as constantes $c_1(t)$ e $c_2(t)$ na Eq. 2.44 e posteriormente na Eq. 2.41, levando em consideração que não há carga axial temos

$$\rho A \ddot{w} + EI w'''' = w'' \left(N_1(t) + \frac{EA}{2l} \int_0^1 w'^2 dx \right) + F, \quad (2.48)$$

colocando a equação na forma adimensional temos

$$\hat{w}'''' + \ddot{\hat{w}} - \alpha \hat{w}'' \int_0^1 \hat{w}'^2 dx = F_{non}, \quad (2.49)$$

onde $\alpha = \frac{l^2 A}{2I}$, $F_{non} = \frac{l^3 F}{EI}$, $\hat{w} = \frac{w}{l}$.

A Eq. 2.49 é uma equação não-linear que é normalmente utilizada para modelar barras com não-linearidade geométrica.

2.4 O Método de Galerkin

Para a solução da equação da barra representada na Eq. 2.49 temos várias opções de métodos a serem utilizados uma vez que a equação é de difícil solução analítica. O método de Rayleigh-Ritz não pode ser aplicado uma vez que não trata sistemas não conservativos[12], que é o caso da presente dissertação em virtude de um termo dissipativo que ainda será incluído. O método de Elementos Finitos, apesar de resolver a equação, tem um custo de processamento alto[8]. Nos resta um método de resíduos ponderados chamado Método de Galerkin, que permite a transformação de uma EDP em uma EDO[8]. Ele trata sistemas não conservativos e se mostra computacionalmente eficiente, conforme veremos a seguir.

Considere um sistema com a equação e condições de contorno expressas respectivamente por

$$A(w) = f \quad (2.50)$$

$$B_1(w) = w_{10}; \quad B_2(w) = w_{20}, \quad (2.51)$$

onde $w(x, t)$ é a variável dependente no espaço x e tempo t , A é um operador diferencial no espaço e tempo, f é o forçamento, B_1 e B_2 são operadores de contorno e w_{10} e w_{20} são condições de contorno que aqui assumimos como independentes do tempo. Nós procuramos soluções aproximadas para o sistema na forma

$$w(x, t) = \phi_0(x) + \sum_{i=1}^n u_i(t) \phi_i(x), \quad (2.52)$$

onde $\phi_0(x)$ é a solução estática do sistema que satisfaz as condições de contorno não homogêneas da Eq. 2.51. Se as condições de contorno são homogêneas ($w_{10} = w_{20} = 0$) então $\phi_0(x) = 0$. O parâmetro $u_i(t)$ é um coeficiente desconhecido, determinado no curso da solução. A função $\phi_i(x)$ é uma função aproximação. Cada função $\phi_i(x)$ deve satisfazer as seguintes condições:

- Deve satisfazer a forma homogênea de todas as condições de contorno do problema.
- Deve ser n vezes diferenciável, onde n é a ordem da equação diferencial do sistema.
- Deve pertencer a um conjunto de funções lineares independentes, ou seja, o conjunto deve conter todas as potências de x , garantindo que a solução convirja com o aumento de n .

Para problemas estruturais, os modos de vibração lineares da estrutura são considerados excelentes escolhas como funções de aproximação, pois satisfazem as condições de contorno e levam a uma rápida convergência da série da Eq. 2.52.

Substituindo a Eq. 2.52 na Eq. 2.50 e levando em consideração que temos uma solução aproximada o que nos leva a um resíduo R temos

$$A \left[\phi_0(x) + \sum_{i=1}^n u_i(t) \phi_i(x) \right] - f = R. \quad (2.53)$$

No método dos resíduos ponderados o erro é minimizado fazendo com que o mesmo seja ortogonal para todas as funções peso ψ_j . No método de Galerkin, ψ_j é escolhido para ser o mesmo que ϕ_j . Assim, multiplicando a Eq. 2.53 por ϕ_j , integrando a equação no domínio do problema Γ e minimizando o erro a zero temos

$$\int_{\Gamma} \phi_j(x) \left\{ A \left[\phi_0(x) + \sum_{i=1}^n u_i(t) \phi_i(x) \right] - f \right\} dx = \int_{\Gamma} \phi_j(x) R dx = 0 \quad (2.54)$$

que pode ser reescrita como

$$\int_{\Gamma} \phi_j(x) (A[\phi_0(x)] - f) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma} \phi_j(x) A[u_i(t) \phi_i(x)] dx = 0. \quad (2.55)$$

Realizando as integrais da Eq. 2.55 temos n equações diferenciais no tempo em $u_i(t)$, que podem ser integradas numericamente utilizando o método de Runge-Kutta, por exemplo. Após, os resultados são substituídos na Eq. 2.52 para obtermos a resposta total. O número de modos n precisa ser adequado para cada caso para investigar a convergência

da solução.

A redução de um sistema de equações diferenciais parciais no espaço e no tempo a um número de equações diferenciais ordinárias no tempo é significativamente vantajoso do ponto de vista computacional. Este é o maior benefício de utilizar o método de Galerkin ao invés do método de elementos finitos.

2.4.1 Método de Galerkin aplicado a barra com não-linearidade geométrica

Como uma ilustração do método, considere, agora, uma barra fixa nas duas extremidades sujeita a não-linearidade geométrica conforme Eq. 2.49. Por conveniência retiramos os chapéus da variável normalizada de \hat{w} .

$$w'''' + \ddot{w} - \alpha w'' \int_0^1 w'^2 dx = F_{non}, \quad (2.56)$$

onde as condições de contorno de uma barra fixa nas duas extremidades são expressas por

$$w(0, t) = w'(0, t) = 0; w(1, t) = w'(1, t) = 0. \quad (2.57)$$

Uma vez que as condições de contorno da barra são homogêneas temos que $\phi_0(x) = 0$ e a Eq. 2.52 é reduzida a

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n u_i(t) \phi_i(x). \quad (2.58)$$

Escolhemos $\phi_i(x), i = 1, 2, \dots$ para serem os modos de vibração da barra. Os modos de vibração utilizados são normalizados, ou seja, $A_i = 1$.

Substituindo a Eq. 2.58 na Eq. 2.56, multiplicando o resultado pelo modo de vibração ϕ_j e integrando sob o domínio de 0 a 1 temos

$$\int_0^1 \phi_j \left(\sum_{i=1}^n u_i \phi_i'''' + \sum_{i=1}^n \ddot{u}_i \phi_i \right) dx + \int_0^1 \phi_j \left\{ -\alpha \sum_{i=1}^n u_i \phi_i'' \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n u_k \phi_k' \right)^2 = F_{non} \right\} dx. \quad (2.59)$$

A partir da Eq. 2.13 temos que a equação adimensional que governa a i -ésima frequência natural e modo de vibração é dada por

$$\phi_i'''' - \omega_{non,i}^2 \phi_i = 0. \quad (2.60)$$

Em seguida, ϕ_i'''' na Eq. 2.59 é substituído por $\omega_{non,i}^2 \phi_i$ conforme definido na Eq. 2.60. Aplicando a integral em cada termo da equação temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n u_i \int_0^1 \phi_j \omega_{non,i}^2 \phi_i dx + \sum_{i=1}^n \ddot{u}_i \int_0^1 \phi_j \phi_i dx - \alpha_{jikl} \sum_{i,k,l=1}^n u_i u_k u_l \int_0^1 \phi_j \phi_i'' dx \int_0^1 \phi_k' \phi_l' dx = \\ = \int_0^1 \phi_j F_{non} dx, \end{aligned} \quad (2.61)$$

onde $\alpha_{jikl} = -\alpha \int_0^1 \phi_j \phi_i'' dx \int_0^1 \phi_k' \phi_l' dx$.

Os dois primeiros termos da Eq. 2.61 podem ser simplificados utilizando a ortonormalidade³ dos modos de vibração o que reduz a Eq. 2.61 para

$$\ddot{u}_j + \omega_{non,j}^2 u_j + \alpha_{jikl} \sum_{i,k,l=1}^n u_i u_k u_l = f_j; \quad j = 1, \dots, n \quad (2.62)$$

onde $f_j = \int_0^1 \phi_j F_{non} dx$.

Como exemplo, utilizando somente o primeiro modo para aproximação ($n = 1$) temos que a Eq. 2.62 fica na forma

$$\ddot{u}_1 + \omega_{non,1}^2 u_1 + \alpha_{1111} u_1^3 = f_1, \quad (2.63)$$

onde $\omega_{non,1}^2 = 22.37^2 = 500.564$; $\alpha_{1111} = -\alpha \int_0^1 \phi_1 \phi_1'' dx \int_0^1 \phi_1'^2 dx = 151.335\alpha$.

A Eq. 2.63 pode ser integrada numericamente no tempo. Uma vez obtido u_1 o resultado é substituído na Eq. 2.58 para obtermos a resposta completa do sistema.

2.5 Redução a um sistema de parâmetros concentrados

Resolver a EDP 2.48 é numericamente custoso computacionalmente [8], uma vez que envolve um problema não-linear e dependente no espaço e tempo. Por esta razão optamos por aplicar o Método de Galerkin à EDP, que é computacionalmente eficiente, e que reduz a EDP em um sistema discreto de EDOs. Assim, reduziremos a EDP a um sistema com um único grau de liberdade.

³A ortonormalidade dos modos de vibração pode ser resumida por

$$\int_0^1 \phi_i \phi_j dx = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ 1 & i \neq j \end{cases}$$

,onde δ_{ij} é o delta de Kronecker.

Introduzindo o coeficiente de amortecimento c_{non} na Eq. 2.48 temos

$$w'''' + \ddot{w} + c_{non}\dot{w} - \alpha_1 \left[\int_0^1 w'^2 dx \right] w'' = 0. \quad (2.64)$$

Por conveniência considere as variáveis aqui como normalizadas.

Aplicando o método de Galerkin a Eq.2.64 no caso em que considera-se apenas um grau de liberdade temos que

$$w = u(t)\phi(x), \quad (2.65)$$

onde $\phi(x)$ corresponde ao primeiro modo de vibração da barra.

Substituindo a Eq.(2.65) na Eq.(2.64) e multiplicando por ϕ temos

$$u(t)\phi\phi'''' + c_{non}\phi^2\dot{u} + \phi^2\ddot{u} - \alpha_1 u^3 \phi\phi'' \int_0^1 \phi'^2 dx = 0. \quad (2.66)$$

Podemos substituir o termo ϕ'''' por $\omega^2\phi$ conforme definido na Eq. 2.60 e chegamos a

$$u\phi^2\omega^2 + c_{non}\phi^2\dot{u} + \phi^2\ddot{u} - \alpha_1 u^3 \phi\phi'' I_1 = 0, \quad (2.67)$$

onde $I_1 = \int_0^1 \phi'^2 dx$.

Integrando-se em x entre 0 e 1, e considerando-se que $\int_0^1 \phi^2 dx = 1$ temos

$$\omega^2 u + c_{non}\dot{u} + \ddot{u} - \alpha_1 I_1 u^3 \int_0^1 \phi\phi'' dx = 0. \quad (2.68)$$

Agora iremos realizar uma mudança de variável na equação de modo que a nova variável y corresponda ao deslocamento máximo da barra. Assim,

$$y = w_{max} = u\phi_1(1/2), \quad (2.69)$$

onde y é a nova variável, w_{max} corresponde ao deslocamento máximo ao qual se aplicam as equações de movimento com massa efetiva m_{eff} e k_{eff} do modelo massa mola e $\phi(1/2)$ é o primeiro modo de vibração no meio da barra. Como $\phi(1/2) = 1.58815$ conseqüentemente temos que $u = y/1.58815$.

Escrevendo ainda em termos de u temos

$$m_{non}\ddot{u} + c_{non}\dot{u} + \omega_{non}^2 u - \alpha_1 I_1 I_2 u^3 = 0, \quad (2.70)$$

onde $I_2 = \int_0^1 \phi\phi'' dx$.

Agora substituindo u por $y/1.59d$ uma vez que estávamos com a variável normalizada,

mantendo o tempo T arbitrário, substituindo α_1 , e aproveitando o fato de que $I_1 = -I_2 = 12.3026$ temos,

$$m_{non} \frac{\ddot{y}}{1.59d} + c_{non} \frac{\dot{y}}{1.59d} + \omega_{non}^2 \frac{y}{1.59d} + 908.12 (dh)^2 \frac{y^3}{1.59^3 d^3} = 0 \quad (2.71)$$

Multiplicando-se a equação acima por $1.59d$ e posteriormente por EI/l^3 e que a frequência para o primeiro modo de vibração é $\omega_{non} = 22.373$ chegamos a

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + \frac{EI}{l^3} 22.373^2 y + \frac{360.05 EI}{h^2} \frac{EI}{l^3} y^3 = 0, \quad (2.72)$$

e posteriormente

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + 1.304 k_{eff} y + \frac{0.9376}{h^2} k_{eff} y^3 = 0. \quad (2.73)$$

Dividindo por 1.304 temos

$$m_{eff} \ddot{y} + c_{eff} \dot{y} + k_{eff} y + \frac{0.719}{h^2} k_{eff} y^3 = 0, \quad (2.74)$$

onde $m_{eff} = 0.767m$, $c_{eff} = 0.767cl$ e $k_{eff} = 384 \frac{EI}{l^3}$.

2.6 Microbarra sob a ação de Força Eletrostática

Os micro e nanoressonadores além de serem barras que vibram tem na sua dinâmica outro importante fator, a força eletrostática devido a diferença de potencial entre o eletrodo e a barra conforme ilustrado Figura 2.5. Assim, é necessário adicionarmos a força eletrostática à equação da dinâmica da barra deduzida anteriormente, juntamente com a não-linearidade geométrica.

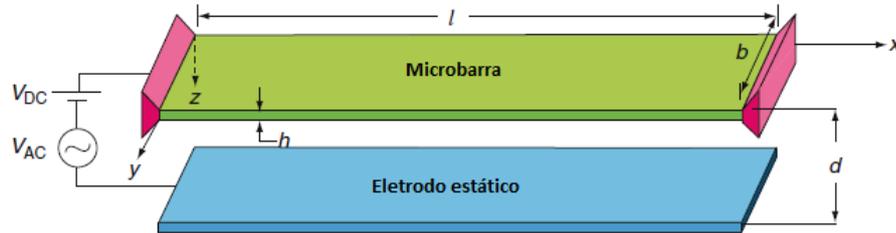


Figura 2.5: Microbarra sujeita a força eletrostática. Fonte: [8]

Considere a barra da Fig. 2.5 de seção retangular $A = bh$ com extremidades fixas. A barra está sujeita a uma força eletrostática por unidade de comprimento no mesmo molde

de um capacitor de placas paralelas e definida por

$$F(x) = \frac{\epsilon b [V_{DC} + V_{AC} \cos(\Omega t)]^2}{2(d - w(x))^2}, \quad (2.75)$$

onde d é a distância que separa a microbarra do eletrodo inferior, V_{DC} é a tensão DC e V_{AC} e Ω são a tensão harmônica AC e a frequência, respectivamente. A microbarra é passível de deformação devido a força eletrostática, mas para o presente caso iremos reduzir o modelo para uma aproximação aceitável de um capacitor de placas paralelas.

Assumindo que a carga axial é zero e adicionando o termo da força eletrostática à Eq. 2.48 no forma dimensional temos

$$EIw'''' + c\dot{w} + \rho b h \ddot{w} = \frac{EA}{2l} w'' \int_0^l w'^2 dx + \frac{\epsilon b [V_{DC} + V_{AC} \cos(\Omega t)]^2}{2(d - w)^2}. \quad (2.76)$$

Como é conveniente normalizar a deflexão da barra em relação a d introduzimos as variáveis adimensionais

$$\hat{w} = \frac{w}{d}, \hat{x} = \frac{x}{l}, \hat{t} = \frac{t}{T}, \quad (2.77)$$

onde T é a escala de tempo definida por $T = \sqrt{\frac{\rho b h l^4}{EI}}$.

Substituindo a Eq. 2.77 na Eq. 2.76 e retirando os chapéus das variáveis adimensionais, a equação adimensional que resta é

$$w'''' + \ddot{w} + c_{non} \dot{w} = \alpha_1 \left[\int_0^1 w'^2 dx \right] w'' + \frac{\alpha_2 [V_{DC} + V_{AC} \cos(\Omega t)]^2}{(1 - w)^2}. \quad (2.78)$$

Os parâmetros que aparecem na Equação são definidos por

$$\alpha_1 = 6 \left(\frac{d}{h} \right)^2; \alpha_2 = \frac{6\epsilon l^4}{Eh^3 d^3}; c_{non} = \frac{12cl^4}{ETbh^3}; \quad (2.79)$$

Assim, até o presente momento, introduzimos dois importantes efeitos na dinâmica da barra: a força Eletrostática, comum em vários tipos de MEMS, e a não-linearidade geométrica, relevante no caso de a deflexão da barra ser muito grande em relação a sua espessura. Entretanto, nos resta introduzir mais um efeito: A Força de Casimir, que deve ser considerada em dispositivos de escala nanométrica conforme veremos no próximo capítulo.

É importante ressaltar que o Método de Galerkin não será aplicado na força eletrostática e tal cálculo será deixado para trabalhos futuros. Assim, conforme já dito anteriormente, a aproximação de placas paralelas para o ressonador é aceitável conforme

já realizado por [10] e [17].

Retornando a Eq. 2.74, adicionando o termo da força eletrostática e por questões de conveniência, realizamos mais uma mudança de variável na forma $s = y/d$, onde d é a distância entre a barra não deformada e o substrato. Assim, chegamos a equação final do movimento da barra definida por

$$\ddot{s} + s + \alpha s^3 + \gamma \dot{s} + \frac{B}{2(1 + s^2)} = 0, \quad (2.80)$$

onde $B = \frac{\epsilon_0 b l V^2}{d^2}$, $\alpha = 0.719(d/h)^2$, γ é o coeficiente de atrito.

Capítulo 3

A Força de Casimir

O efeito Casimir padrão, associado ao campo eletromagnético, foi proposto por H. B. G. Casimir em 1948 e consiste, essencialmente, na atração entre duas placas neutras, paralelas entre si e perfeitamente condutoras, que estão localizadas no vácuo.

O efeito Casimir é causado pelo fato do espaço vazio comportar flutuações do vácuo, partículas virtuais - antipartículas virtuais que continuamente se formam do vácuo. O espaço entre as duas placas restringe os comprimentos de onda possíveis para estas partículas virtuais. Como resultado, há uma menor densidade de energia entre as duas placas do que no espaço aberto; em essência, há menos partículas virtuais entre as placas que do outro lado delas, criando uma diferença de pressão que as empurra uma contra a outra.

Para discutir melhor as origens da Força de Casimir vamos rever, primeiramente, alguns conceitos da Mecânica Quântica para chegar ao tratamento quântico do campo eletromagnético.

3.1 O Oscilador Harmônico Quântico

Analisar o oscilador harmônico quanticamente significa resolver a Equação de Schrodinger para este sistema a fim de se obter as autofunções e os autovalores (níveis de energia). A Equação de Schrodinger dependente do tempo tem a forma

$$H\Psi(x, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x, t), \quad (3.1)$$

onde H denota o operador hamiltoniano obtido a partir da hamiltoniana do sistema clássico,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2, \quad (3.2)$$

onde k é a constante do oscilador, p é o momento linear, q a posição e m a massa.

Promovendo-se p e q à condição de operadores quânticos temos que a hamiltoniana de um oscilador harmônico quântico, que representa a energia do sistema (soma da energia cinética e potencial) é definida por [13]

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2q^2. \quad (3.3)$$

Os níveis de energia possíveis para o oscilador harmônico são obtidos resolvendo-se a Eq. Schroedinger independente do tempo que assume a forma

$$H\psi_n = E\psi_n. \quad (3.4)$$

É possível obter $\Psi_n(x)$ utilizando técnicas usuais para a solução de EDOs, entretanto no nosso caso adotaremos um método algébrico para a obtenção dos autovalores.

Começamos notando que as equações de movimento de Heisenberg tem a mesma forma que as equações de Hamilton

$$\dot{q} = (i\hbar)^{-1}[q, H] = p/m \quad (3.5)$$

$$\dot{p} = (i\hbar)^{-1}[p, H] = -m\omega^2q. \quad (3.6)$$

Estas equações satisfazem a regra de comutação $[q, p] = qp - pq = i\hbar$. Definindo o operador a e seu adjunto a^\dagger

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(p + im\omega q)$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(p - im\omega q),$$

podemos reexpressar p e q em termos destes novos operadores,

$$q = i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a - a^\dagger), \quad (3.7)$$

$$p = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(a + a^\dagger). \quad (3.8)$$

Como $[q, p] = i\hbar$ temos que

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (3.9)$$

Os operadores definidos acima nos permitem reescrever a hamiltoniana definida na

Eq. 3.3 como

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega(aa^\dagger + a^\dagger a) = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right). \quad (3.10)$$

A função de onda $\psi^\dagger = a\psi$ satisfaz a equação anterior e é um autoestado de H conforme

$$H\psi^\dagger = (E + \hbar\omega)\psi^\dagger. \quad (3.11)$$

Assim, podemos concluir que $\hbar\omega$ é o intervalo entre os estados e a^\dagger e a são os operadores de levantamento e abaixamento, respectivamente, entre esses estados. É importante, também, calcular a energia fundamental através de

$$H\psi_0 = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)\psi_0 = \frac{\hbar\omega}{2}\psi_0 \quad (3.12)$$

A Eq. 3.12 estabelece a energia mínima ou energia do ponto zero, que vale $E = \frac{\hbar\omega}{2}$. Esta energia é o resultado das flutuações quânticas do oscilador harmônico associados ao princípio da incerteza de Heisenberg.

Perceba as diferenças com relação ao oscilador harmônico clássico. No caso clássico, a energia pode ter qualquer valor, sendo determinada pelas condições iniciais do problema (velocidade e posição iniciais da massa). Já, no caso quântico, o espectro de energias consiste em um número infinito de níveis discretos, como ilustrado na Figura 3.1. Vemos que, para todos os valores da energia, a partícula está ligada, e que os níveis de energia estão igualmente espaçados.

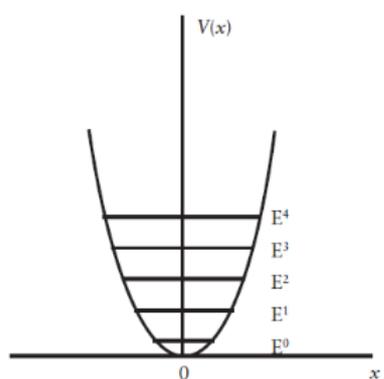


Figura 3.1: Níveis de Energia

Outra diferença com relação ao oscilador clássico é que o nível de menor energia é diferente de zero como acabamos de ver. Enquanto na Mecânica Clássica a menor energia possível para o oscilador seria a que corresponde à situação em que a partícula estaria em repouso no mínimo do potencial, ou seja, teria energia mecânica total igual a zero, no

caso da Mecânica Quântica a relação de incerteza não permite esta situação de termos a partícula com momento zero em uma posição determinada. Pois, assim, teria posição e momento simultaneamente bem definidos. Quanticamente, a posição e o momento da partícula, flutuam em torno do zero, resultando em uma energia média diferente de zero (sendo zero o mínimo do potencial).

3.2 Quantização do Campo Eletromagnético

Seguindo a referência [13], demonstraremos agora que um modo do campo eletromagnético (EM) é equivalente a um oscilador harmônico, demonstração essa necessária para a quantização do campo eletromagnético. As equações de Maxwell para o espaço livre de fontes são o início para a demonstração

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (3.13a)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.13b)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \quad (3.13c)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}, \quad (3.13d)$$

onde \vec{E} denota o Campo Elétrico, \vec{B} o Campo Magnético e ϵ_0 e μ_0 são a permissividade e a permeabilidade do vácuo, respectivamente.

Para um tratamento quântico, devemos descrever as ondas em termos do potencial vetor $\vec{A}(\vec{r}, t)$, relacionado ao campo Magnético pela relação $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, e o potencial elétrico $\Phi(r, t)$. Através do rotacional da indução magnética definido na equação 3.13d obtemos a equação da onda

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0, \quad (3.14)$$

escrita no gauge de Coulomb definido por $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ e na ausência de fontes $\phi = 0$.

Assim, podemos obter a solução das equações de Maxwell resolvendo a Eq. 3.14 no gauge de Coulomb sujeito a condições de contorno. A Eq. 3.14 admite soluções na forma de ondas monocromáticas

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \alpha(t) \vec{A}_0(\vec{r}) + \alpha^*(t) \vec{A}_0^*(\vec{r}) \quad (3.15)$$

$$= \alpha(0) e^{-i\omega t} \vec{A}_0(\vec{r}) + \alpha^*(0) e^{i\omega t} \vec{A}_0^*(\vec{r}), \quad (3.16)$$

onde \vec{A}_0 satisfaz a Equação de Helmholtz. Os coeficientes $\alpha(t)$ satisfazem

$$\frac{d^2}{dt^2}\alpha = -\omega^2\alpha, \quad (3.17)$$

de onde obtém-se $\alpha(t) = \alpha(0)e^{\pm i\omega t}$. Agora, notemos que a hamiltoniana para o campo eletromagnético

$$H_F = \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\vec{E}^2 + \vec{B}^2), \quad (3.18)$$

pode ser escrita como a hamiltoniana para um oscilador harmônico de massa unitária usando-se $\vec{A}(\vec{r}, t)$ definido na equação 3.15

$$H_F = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2), \quad (3.19)$$

onde

$$q(t) = \frac{i}{c\sqrt{4\pi}}[\alpha(t) - \alpha^*(t)] \quad (3.20)$$

$$p(t) = \frac{k}{\sqrt{4\pi}}[\alpha(t) + \alpha^*(t)]. \quad (3.21)$$

A hamiltoniana definida acima é válida somente para a onda monocromática de frequência ω , o que sugere ainda que o modo do campo de frequência ω é matematicamente equivalente ao de um oscilador harmônico clássico de frequência ω .

3.3 O Campo Eletromagnético no Espaço Livre

Agora, iremos considerar o campo eletromagnético no espaço livre e sem condições de contorno. Entretanto, para normalizarmos nossas funções devemos impor algumas condições de contorno. Neste caso, podemos propor que o espaço está contido em uma caixa de volume $V = L^3$ e impomos ao campo uma condição de contorno periódica. Assim, o potencial vetor é da forma:

$$\vec{A}(x + L, y + L, z + L, t) = \vec{A}(x, y, z, t). \quad (3.22)$$

A condição de contorno utilizada não terá consequências físicas se L for muito maior comparado com qualquer dimensão física de interesse. Assim, considerando a caixa normalizada e que o potencial vetor para um determinado modo é escrito como

$$\vec{A}_k(\vec{r}) = V^{-1/2} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \vec{e}_k, \quad (3.23)$$

onde o vetor unitário \vec{e}_k especifica a polarização do modo do campo.

A condição $k \cdot e_k$ ($k \cdot e_k = 0$ para satisfazer a condição $\nabla \cdot A(\vec{r}, t) = 0$ no gauge de Coulomb) implica que temos duas possibilidades para $e_k \cdot e_{k1}$ e e_{k2} . Estas duas possibilidades correspondem às polarizações para o campo eletromagnético de modo que o potencial vetor pode ser escrito na forma

$$\vec{A}_{k\lambda}(\vec{r}, t) = \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k V} \right)^{1/2} \left[a_{k\lambda}(t) e^{ik\vec{r}} + a_{k\lambda}^\dagger(t) e^{-ik\vec{r}} \right] \vec{e}_{k\lambda}, \quad (3.24)$$

ou ainda, para uma onda plana,

$$\vec{A}_{k\lambda}(\vec{r}, t) = \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k V} \right)^{1/2} \left[a_{k\lambda}(0) e^{-i(\omega_k t - k\vec{r})} + a_{k\lambda}^\dagger(0) e^{i(\omega_k t - k\vec{r})} \right] \vec{e}_{k\lambda}, \quad (3.25)$$

onde λ é o índice que representa as possibilidades (1,2) para o vetor unitário e_k (polarizações). Os operadores $a_{k\lambda}^\dagger$ e $a_{k\lambda}$ correspondem, respectivamente, ao operador de criação do fóton e ao operador de aniquilação do fóton.

Como há infinitos modos dentro da "caixa", reescrevemos o potencial vetor total para o espaço livre como o somatório dos modos

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{k\lambda} \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k V} \right)^{1/2} \left[a_{k\lambda}(t) e^{ik\vec{r}} + a_{k\lambda}^\dagger(t) e^{-ik\vec{r}} \right] \vec{e}_{k\lambda}. \quad (3.26)$$

Por analogia com a hamiltoniana do oscilador quântico definido na Eq. 3.3, o hamiltoniano do campo para infinitos modos consiste em

$$H_F = \sum_{k\lambda} \hbar\omega_k \left(a_{k\lambda}^\dagger a_{k\lambda} + \frac{1}{2} \right). \quad (3.27)$$

Essa é a hamiltoniana para infinitos osciladores harmônicos desacoplados.

Os autovalores da energia do campo E são: $\sum_{k\lambda} \hbar\omega_k \left(n_{k\lambda} + \frac{1}{2} \right)$. Neste caso, o campo eletromagnético é caracterizado pelo conjunto dos números de fótons $n_{k\lambda}$. Assim, o estado $n_{k\lambda}$ tem um total de fótons $\sum_{k\lambda} n_{k\lambda}$ e energia

$$E = \sum_{k\lambda} \hbar\omega_k \left(n_{k\lambda} + \frac{1}{2} \right) \quad (3.28)$$

Assim chegamos a teoria quântica do campo eletromagnético no espaço livre, onde os estados estacionários são descritos por fótons de energia $\hbar\omega_k$ e momento $\hbar k$.

Observamos ainda que o campo eletromagnético no vácuo com ausência de fótons

($n_{k\lambda} = 0$) tem uma energia $\frac{\hbar\omega}{2}$, chamada de energia do ponto zero associada a cada modo com índices k e λ . É essa energia que dá origem a teoria do efeito Casimir que veremos na próxima seção.

3.4 Efeito Casimir

3.4.1 Cálculo da Força de Casimir

A energia de Casimir entre duas placas paralelas corresponde a diferença da energia das placas a uma certa distância com aquela para placas infinitamente separadas [13]. Deste modo, o cálculo da energia de Casimir se resume a

$$U(d) = E(d) - E(\infty). \quad (3.29)$$

Para calcular $E(d)$, consideramos o campo EM no interior de uma caixa retangular com paredes perfeitamente condutoras (Fig. 3.2). Consideramos uma caixa com dois lados iguais e um lado igual a d , correspondendo à separação entre as placas.

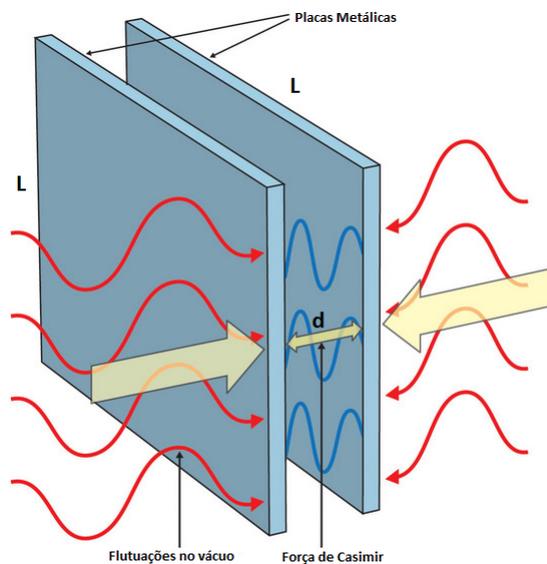


Figura 3.2: Placas metálicas a uma distância d

Partindo da equação de onda para o campo elétrico no espaço livre e de suas componentes x , y e z , e utilizando as condições de contorno impostas pela caixa, chegamos a

energia do vácuo no interior da cavidade

$$E(d) = \sum_{l,m,n} \pi \hbar c \left[\frac{l^2}{L^2} + \frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{d^2} \right]^{1/2} = \sum_{l,m,n} \hbar c (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2}, \quad (3.30)$$

onde $k_x = \frac{l\pi}{L}$, $k_y = \frac{m\pi}{L}$ e $k_z = \frac{n\pi}{L}$, com l, m, n inteiros e maiores que zero, d é a distância entre as faces da caixa que estão sendo consideradas como placas paralelas e L é tamanho de dois lados da caixa. l, m e n são inteiros positivos e representam os diferentes modos no interior da caixa.

Partindo da equação 3.30 temos que, no limite em que $L \rightarrow \infty$, pode-se repor a soma sobre l e m por uma integral. Assim, quando $L \rightarrow \infty$, temos

$$E(d) = \frac{L^2}{\pi^2} \hbar c \sum_n \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \left[k_x^2 + k_y^2 + \frac{n^2 \pi^2}{d^2} \right]^{1/2}. \quad (3.31)$$

Analogamente se $d \rightarrow \infty$,

$$E(\infty) = \frac{L^2}{\pi^2} \hbar c \frac{d}{\pi} \sum_n \int \int \int_0^\infty dk_x dk_y dk_z \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}. \quad (3.32)$$

Substituindo ambos os casos na equação 3.29 e após alguma álgebra e utilização da fórmula de Euler-Maclaurin obtemos a energia de Casimir expressa por

$$U(d) = - \left(\frac{\pi^2 \hbar c}{720 d^3} \right) L^2. \quad (3.33)$$

A força de Casimir está relacionada à variação dessa energia, $F = -\frac{\partial U}{\partial d}$, de modo que entre as placas existe uma pressão atrativa definida por

$$P(d) = \frac{F(d)}{L^2} = - \left(\frac{\pi^2 \hbar c}{240 d^4} \right). \quad (3.34)$$

A título de conhecimento, a pressão de Casimir entre duas placas perfeitamente condutoras com um distância entre si de 10nm equivale aproximadamente a 1atm.

3.4.2 Força entre dielétricos

A equação 3.34 definiu a força de Casimir entre duas placas paralelas, infinitas e perfeitamente condutoras. Entretanto a consideração de condutividade perfeita para a expressão 3.34 em todas as frequências se torna impraticável. Assim, temos que realizar algumas alterações na expressão citada para considerar as propriedades dielétricas do

meio.

Em 1956 Lifshitz [9] desenvolveu uma teoria macroscópica de força entre dielétricos. Os seus resultados foram ao encontro daqueles da teoria microscópica com a adição das forças intermoleculares, quando as constantes dielétricas estão próximas a unidade, mas ao mesmo tempo eram diferentes. No caso limite para condutores perfeitos, a força entre placas se reduzia a força de Casimir.

Vamos agora considerar o caso de um meio com função dielétrica $\epsilon_3(\omega)$ entre dois outros meios com funções dielétricas $\epsilon_1(\omega)$ e $\epsilon_2(\omega)$. Esses meios ocupam regiões $0 \leq z \leq d$, $z < 0$ e $z > d$, respectivamente, conforme a Figura 3.3.

Nosso ponto de partida é calcular as frequências dos modos do campo EM formado nas camadas dielétricas. Para isso devemos considerar soluções do tipo $\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0(\vec{r})e^{-i\omega t}$ e $\vec{B}(\vec{r}, t) = B_0(\vec{r})e^{-i\omega t}$ para as equações de Maxwell.

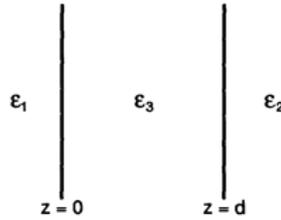


Figura 3.3: Camadas com diferentes funções dielétricas

A solução das equações de Maxwell nas regiões $z < 0$, $0 \leq z \leq d$ e $z > d$ nos levam as seguintes expressões para a componente z do campo elétrico

$$e_z(z) = Ae^{K_1 z}, z < 0 \quad (3.35)$$

$$e_z(z) = Be^{K_3 z} + Ce^{K_3 z}, 0 \leq z \leq d \quad (3.36)$$

$$e_z(z) = De^{K_2 z}, z > d \quad (3.37)$$

,onde $K_j = \sqrt{k^2 - \epsilon_j(\omega)\omega^2/c^2}$.

Posteriormente devemos utilizar as condições de contorno pelas quais 1) $\epsilon e_z(z)$ e de_z/dz , e 2) e_y e de_y/dz são contínuos em $z = 0$ e $z = d$. Neste caso, $e_z(z)$ é a componente na direção \hat{z} da solução proposta.

Utilizando o fato de que $\epsilon e_z(z)$ e de_z/dz são contínuos em $z = 0$ e $z = d$, temos quatro equações para os coeficientes A , B , C e D de modo que após o cálculo do determinante da matriz dos coeficientes temos a seguinte expressão

$$\frac{(\epsilon_3 K_1) + (\epsilon_1 K_3)(\epsilon_3 K_2 + \epsilon_2 K_3)}{(\epsilon_3 K_1) - (\epsilon_1 K_3)(\epsilon_3 K_2 - \epsilon_2 K_3)} e^{2K_3 d} - 1 = 0 \quad (3.38)$$

Do mesmo modo o fato de que e_y e de_y/dz são contínuos em $z = 0$ e $z = d$ nos leva ao seguinte resultado,

$$\frac{(K_1 + K_2)(K_2 + K_3)}{(K_1 - K_2)(K_2 - K_3)} e^{2K_3 d} - 1 = 0 \quad (3.39)$$

As equações 3.38 e 3.39 são as condições para as frequências permitidas dos modos do campo eletromagnético.

3.4.3 Energia do ponto zero dos modos de superfície

Consideramos, agora, a energia do ponto zero associada aos modos de superfície

$$E(d) = \sum_n \frac{1}{2} \hbar \omega_{na} + \sum_n \frac{1}{2} \hbar \omega_{nb}, \quad (3.40)$$

onde ω_{na} e ω_{nb} são as frequências associadas com os modos de 3.38 e 3.39, respectivamente.

A soma de todos os modos em 3.40 inclui os valores contínuos de k_x e k_y

$$\sum_n \rightarrow \left(\frac{L^2}{2\pi} \right) \int dk_x \int dk_y \sum_N = \left(\frac{L^2}{2\pi} \right) \int 2\pi k dk \sum_N, \quad (3.41)$$

onde L corresponde ao tamanho dos lados x e y da caixa de quantização e \sum_N à soma de todas as soluções de 3.38 e 3.39 para $\omega(k)$. Assim,

$$E(d) = \frac{\hbar L^2}{4\pi} \int_0^\infty dk k \left[\sum_N \omega_{Na}(k) + \sum_N \omega_{Nb}(k) \right]. \quad (3.42)$$

Aplicando o teorema do argumento temos que a Eq. 3.42 se torna

$$E(d) = \frac{\hbar L^2}{4\pi} \left(\frac{1}{2\pi i} \right) \int_0^\infty dk k \left[\oint_C \omega \frac{F'_a(\omega)}{F_a(\omega)} d\omega + \oint_C \omega \frac{F'_b(\omega)}{F_b(\omega)} d\omega \right], \quad (3.43)$$

onde $F_a(\omega)$ e $F_b(\omega)$ correspondem a parte esquerda das Eqs. 3.38 e 3.39. C é a curva fechada definida pelo eixo imaginário do plano complexo ω e do semicírculo na metade desse plano, com o raio do semicírculo tendendo ao infinito. Assim, podemos dizer que somente a parte complexa tem contribuição para a energia do sistema. Definimos assim

$G_\alpha(\xi) = F_\alpha(i\xi)$ onde $\alpha = 1, 2$, ou ainda

$$G_a(\xi) = \frac{(\epsilon_3 K_1) + (\epsilon_1 K_3)(\epsilon_3 K_2 + \epsilon_2 K_3)}{(\epsilon_3 K_1) - (\epsilon_1 K_3)(\epsilon_3 K_2 - \epsilon_2 K_3)} e^{2K_3 d} - 1, \quad (3.44)$$

$$G_b(\xi) = \frac{(K_1 + K_2)(K_2 + K_3)}{(K_1 - K_2)(K_2 - K_3)} e^{2K_3 d} - 1, \quad (3.45)$$

onde $\epsilon_j = \epsilon_j(i\xi)$ e $K_j^2 = k^2 + \epsilon_j(i\xi)\xi^2/c^2$.

Assim a expressão da energia é dada por

$$E(d) = \frac{\hbar L^2}{8\pi^2} \int_0^\infty dk k \left[\int_{-\infty}^\infty d\xi \log G_a(\xi) + \int_{-\infty}^\infty d\xi \log G_b(\xi) \right], \quad (3.46)$$

onde $G_a(\xi)$ e $G_b(\xi)$ são escritas em função das expressões 3.38 e 3.39.

Através da equação da energia chegamos a pressão entre as camadas dielétricas $P(d) = \frac{F(d)}{L^2} = -\frac{1}{L^2} \frac{\partial U}{\partial d}$,

$$P(d) = -\frac{\hbar}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k \int_0^\infty d\xi K_3 \times \\ \times \left(\left[\frac{(\epsilon_3 K_1) + (\epsilon_1 K_3)(\epsilon_3 K_2 + \epsilon_2 K_3)}{(\epsilon_3 K_1) - (\epsilon_1 K_3)(\epsilon_3 K_2 - \epsilon_2 K_3)} e^{2K_3 d} - 1 \right]^{-1} + \left[\frac{(K_1 + K_2)(K_2 + K_3)}{(K_1 - K_2)(K_2 - K_3)} e^{2K_3 d} - 1 \right]^{-1} \right). \quad (3.47)$$

A equação 3.47 pode ser alterada através da introdução das variáveis p e $s_{1,2}$ definidas por:

$$k^2 = \frac{\epsilon_3 \xi^2}{c^2} (p^2 - 1) \quad (3.48a)$$

$$K_{1,2}^2 = k^2 + \frac{\epsilon_{1,2} \xi^2}{c^2} = \frac{\epsilon_3 \xi^2}{c^2} s_{1,2}^2 \quad (3.48b)$$

Assim a equação 3.47 se transforma em:

$$P(d) = -\frac{\hbar}{2\pi^2 c^3} \int_1^\infty dp p^2 \int_0^\infty d\xi \xi^3 \epsilon_3^{3/2} \\ \left(\left[\frac{(\epsilon_3 s_1) + (\epsilon_1 p)(\epsilon_3 s_2 + \epsilon_2 p)}{(\epsilon_3 s_1) - (\epsilon_1 p)(\epsilon_3 s_2 - \epsilon_2 p)} \times e^{2\xi p \sqrt{\epsilon_3} d/c} - 1 \right]^{-1} + \left[\frac{(s_1 + p)(s_2 + p)}{(s_1 - p)(s_2 - p)} e^{2\xi p \sqrt{\epsilon_3} d/c} - 1 \right]^{-1} \right). \quad (3.49)$$

A Eq. 3.49 nos dá a pressão entre as camadas dielétricas 1 e 2 e está de acordo com [9] quando consideramos que há vácuo na camada 3 ($\epsilon_3 = 1$).

Considerando que a força definida em 3.49 varia em função da distância das placas e do material a ser utilizado, o que é bastante comum em MEMS e NEMS, devemos analisar

casos específicos quanto a distância utilizada entre as placas bem como o material a ser utilizado conforme os casos a seguir:

1)Força entre placas condutoras perfeitas: No caso de placas condutoras perfeitas separadas pelo vácuo, fazemos $\epsilon_{1,2} \rightarrow \infty$ e $\epsilon_3 \rightarrow 1$. Assim a equação 3.49 se reduz a força de Casimir definida na equação 3.34.

2)Placas dielétricas com pequenas separações: Para placas dielétricas com pequenas separações ($s_{1,2} = p$) ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon, \epsilon_3 = 1$) temos que a equação 3.49 se reduz a:

$$F(d) \cong -\frac{\hbar}{16\pi^2 d^3} \int_0^\infty dx \int_0^\infty d\xi \frac{x^2}{\left(\frac{\epsilon+1}{\epsilon-1}\right)^2 e^{x-1}} = -\frac{H}{6\pi d^3}, \quad (3.50)$$

onde H é a constante de Hamaker para o material utilizado. Ressalta-se que para pequenas distâncias a força varia com d^{-3} reduzindo-se, então, à força de van der Walls.

3)Placas dielétricas com grandes separações: Grandes separações são definidas por $d \gg c/\omega_0$, onde ω_0 é a frequência que ocorre uma significativa absorção pelo dielétrico. Assumindo novamente que $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$ e que $\epsilon_3 = 1$ temos que a equação 3.49 se reduz a:

$$F(d) = -\frac{\hbar}{2\pi^2 c^3} \left(\frac{c}{2d}\right)^4 \int_1^\infty dp p^2 \int_0^\infty dx \frac{x^3}{p^4} \times \left(\left[\left(\frac{s+\epsilon p}{s-\epsilon p}\right)^2 e^x - 1 \right]^{-1} + \left[\left(\frac{s+p}{s-p}\right)^2 e^x - 1 \right]^{-1} \right),$$

que pode ser reescrita como,

$$F(d) = -\frac{\hbar C}{2\pi^2 d^4} \quad (3.51)$$

evidenciando que a força varia com d^{-4} .

Uma vez visto a variação da força definida na Eq. 3.49 em relação a distância entre as placas, vejamos agora como se comporta a força em função de alguns materiais conhecidos na fabricação de MEMS e NEMS conforme [6].

Alguns materiais como o ouro são utilizados na fabricação de microsensores, microatuadores e em nanoressonadores. Assim, apresentamos na Fig. 3.4 o gráfico do fator de correção da força da Casimir η pela distância entre as placas d . O fator η pode ser definido como a razão da pressão entre as placas calculada pela Teoria de Lifshitz e a pressão de Casimir entre placas perfeitamente condutoras. Através do gráfico da Fig. 3.4 vemos claramente que à distância de aproximadamente $1\mu\text{m}$ a Força de Casimir equivale àquela calculada na Teoria de Lifshitz, entretanto para a distância em torno de 1nm vemos que a força se comporta com d^3 reduzindo-se, assim, a força de van der Walls e indo ao encontro com o calculado anteriormente.

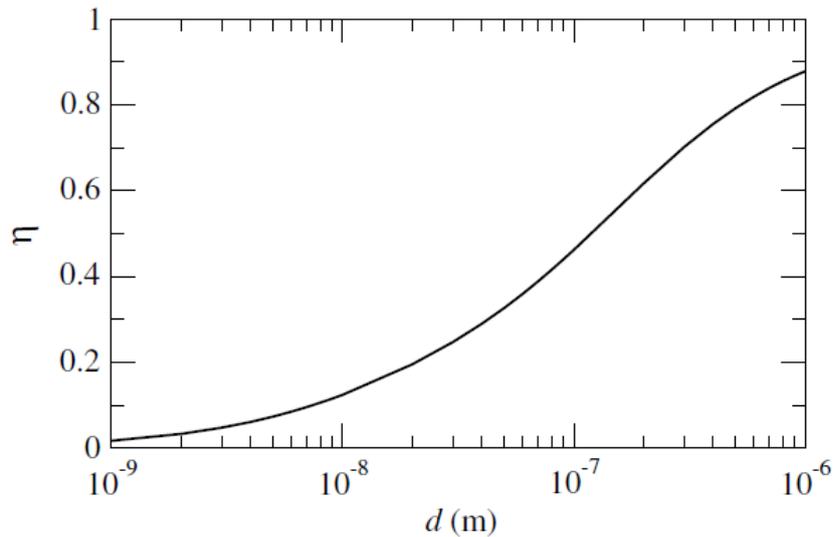


Figura 3.4: η versus distância d para o ouro (Fonte:[6])

O silício é outro material utilizado em MEMS e NEMS de modo que podemos observar o comportamento do fator de correção η em função da distância através da Fig. 3.5. Há que se observar aqui o pequeno efeito que a variação de temperatura traz ao valor de η . Para temperaturas próximas a 700K e com grandes separações o fator de correção η muda significativamente e para pequenas separações não há diferença em relação a curva de 0K. Ressaltamos que apesar de $P(d)$ depender da temperatura, as equações anteriores são consideradas para $T = 0$.

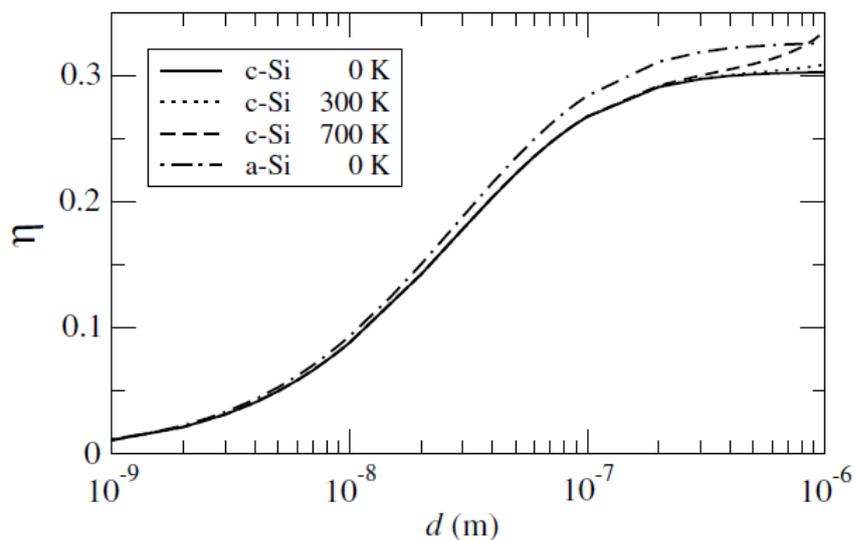


Figura 3.5: η versus distância d para o silício (Fonte:[6])

3.5 Força de Casimir e Equação da barra

A equação do ressonador definida no capítulo 2, com a não-linearidade geométrica, força eletrostática e atrito, apesar ser um bom modelo para descrever a dinâmica da barra, ainda necessita da inclusão do termo da força de Casimir para garantirmos que à distâncias da ordem da nanômetros a dinâmica seja descrita corretamente. Assim a Eq. 2.80 fica da forma

$$\ddot{s} + s + \alpha s^3 + \gamma \dot{s} + \frac{A}{240(1+s)^4} + \frac{B}{2(1+s)^2} = 0, \quad (3.52)$$

onde o termo $\frac{A}{240(1+s)^4}$ se refere a Força de Casimir com $A = \frac{\pi^2 \hbar c b l}{k g^5}$.

Capítulo 4

Dinâmica Não-Linear

O comportamento da maioria dos sistemas físicos pode ser normalmente considerado como não-linear, com exceção de alguns poucos casos que podem ser reduzidos à dinâmica linear [18]. Entretanto nas escalas micrométrica (MEMs) e nanométrica (NEMs) temos a influência de muitas fontes de não-linearidades [8], motivo pelo qual estudar o presente capítulo é essencial para a abordagem do sistema que será apresentado adiante.

A dinâmica de muitos sistemas físicos pode ser modelada através de equações diferenciais ou mapas iterativos. As equações diferenciais descrevem a evolução temporal dos sistemas de modo contínuo, enquanto nos mapas iterativos o tempo é uma variável discreta. As equações diferenciais são muito utilizadas em ciências e engenharia ao passo que mapas iterativos são muito úteis em sistemas biológicos e modelos matemáticos simples.

As equações diferenciais citadas acima são divididas em dois tipos: equações diferenciais ordinárias e equações diferenciais parciais. Para o primeiro tipo temos somente uma variável independente como é o caso do oscilador amortecido,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (4.1)$$

No segundo caso há duas ou mais variáveis independentes.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.2)$$

Como os casos apresentados nesta dissertação serão puramente temporais, nos concentraremos somente nas equações diferenciais ordinárias.

Uma maneira muito comum de representar equações diferenciais ordinárias é feita

através do sistema de equações

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (4.3)$$

lembrando que neste caso $\dot{x}_j = dx_j/dt$, onde n é igual à ordem da equação original.

Para ilustrar, podemos reescrever a Eq. 4.1, utilizando as variáveis $x_1 = x$ e $x_2 = \dot{x}$, na forma do sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1. \end{aligned} \quad (4.4)$$

O sistema acima é dito linear, uma vez que tanto x_1 quanto x_2 aparecem em termos lineares. Um contraexemplo deste tipo de situação é encontrada no caso do pêndulo que é governado pela equação

$$\ddot{x} + \frac{g}{L}\text{sen}(x) = 0, \quad (4.5)$$

onde x é o ângulo do pêndulo em relação a vertical, g é a aceleração da gravidade e L é o comprimento do pêndulo. Reescrevendo a equação temos o sistema não-linear:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{L}\text{sen}(x_1). \end{aligned} \quad (4.6)$$

O termo não-linear, representado pela função seno, torna impossível expressarmos uma solução analítica em termos de funções simples, como ocorre para o oscilador harmônico da Eq. 4.1. Entretanto, uma aproximação para pequenos ângulos $\text{sen}(x) \approx x$ lineariza a expressão do pêndulo.

No intuito de não perder informação sobre o sistema e tornar a análise mais simples, podemos obter uma descrição qualitativa da dinâmica a partir do seguinte procedimento: construímos um espaço abstrato, chamado espaço de fases, cujas direções são dadas pelas coordenadas (x_1, x_2, \dots, x_n) . Neste espaço, representamos os possíveis fluxos de soluções do sistema. Para estimarmos estas soluções, obtemos pontos de equilíbrio da dinâmica, determinados pela condição

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (4.7)$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (4.8)$$

$$\vdots \quad (4.9)$$

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \quad (4.10)$$

Em torno destes pontos fixos exploramos soluções considerando leves perturbações não-lineares, como será discutido mais adiante.

Sistema Autônomo e Sistema Não autônomo

Podemos definir um sistema autônomo e um sistema não autônomo considerando o seguinte sistema de EDOs:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \dot{x} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= \dot{y} = g(x, y) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Se as funções f e g **não dependem do tempo explicitamente**, dizemos que o sistema é **autônomo**. Se f e g **dependem do tempo**, ou seja, $f = f(x, y, t)$ ou $g = g(x, y, t)$, o sistema é conhecido como **não autônomo**.

Mas como devemos tratar um sistema não autônomo? Um meio de tratar tal sistema é transformar o tempo numa variável independente, isto é, $t = z$, tal que $\frac{dz}{dt} = 1$ de forma a reduzir uma EDO não autônoma num sistema autônomo. Com esse método sempre podemos remover a dependência temporal adicionando uma dimensão extra ao sistema.

4.1 Pontos Fixos e Estabilidade

Antes de apresentarmos os sistemas lineares de duas dimensões vejamos alguns conceitos de estabilidade e pontos fixos de um sistema dinâmico.

Considere um fluido se deslocando ao longo do eixo x com uma velocidade local $f(x)$. O fluxo está para a direita se $f(x) > 0$ e para a esquerda se $f(x) < 0$. Para encontrarmos a solução de $\dot{x} = f(x)$ colocamos uma partícula em uma condição inicial x_0 e observamos como ela se desloca ao longo do tempo (através de alguma função $x(t)$). Esta função $x(t)$ é a trajetória e a solução da equação diferencial para a condição inicial x_0 . As figuras que nos permitem visualizar as diferentes trajetórias do sistema dado são chamadas de

retrato de fase.

O retrato de fase é controlado pelos pontos fixos x^* , definidos por $f(x^*) = 0$, uma vez que indicam pontos onde não há fluxo. Na figura 4.1, o ponto preenchido é um ponto fixo estável e o ponto não preenchido é um ponto fixo instável.

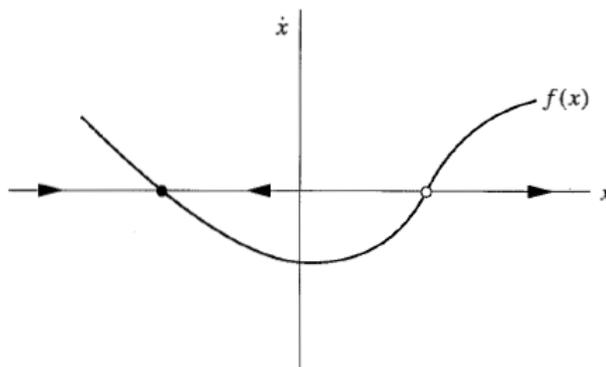


Figura 4.1: Exemplo de retrato de fase

Assim, a estabilidade de um ponto fixo é determinada pelas linhas de fluxo do retrato de fases em torno deste ponto. Caso as linhas sejam convergentes ao ponto em todas as direções, como o ponto cheio da Fig. 4.1, dizemos que o ponto fixo é estável. Caso contrário, se a linha de fluxo diverge em todas as direções, então o ponto fixo é instável.

Para sistemas unidimensionais, as únicas possibilidades existentes para a natureza destes pontos é a estabilidade ou instabilidade. No entanto, como veremos nas próximas seções, o aumento da dimensão produz um aumento na riqueza do comportamento destes fluxos.

Como exemplo, seja $\dot{x} = x^2 - 1$. Para encontrarmos os pontos fixos fazemos $f(x^*) = 0$. Assim, temos que $x^* = \pm 1$. Para determinarmos a estabilidade do sistema fazemos o gráfico de $x^2 - 1$ conforme figura 4.2. O fluxo está para a direita onde $x^2 - 1 > 0$ e para a esquerda onde $x^2 - 1 < 0$, de modo que $x^* = -1$ é estável e $x^* = 1$ é instável.

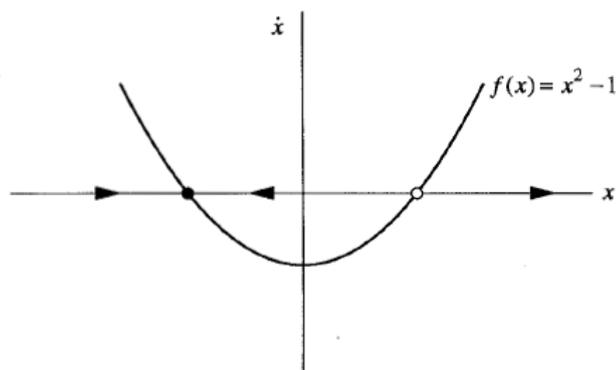


Figura 4.2: Retrato de fase

4.2 Fluxo no Plano

4.2.1 Sistema linear de 2 dimensões

Um sistema linear de 2 dimensões é definido por,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde a, b, c, d são parâmetros. O sistema acima pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\dot{x} = Ax$$

onde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Como exemplo, considere um oscilador harmônico simples do tipo massa-mola governado pela seguinte equação;

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (4.13)$$

onde m é a massa, k é a constante de mola e x é o deslocamento da massa em relação a posição de equilíbrio.

A equação acima tem fácil solução analítica em termos de senos e cossenos porque é uma equação diferencial linear. Para as equações não-lineares normalmente é difícil, se não impossível, encontrar soluções analíticas, de forma que precisamos desenvolver métodos que revelem o comportamento do sistema sem resolvê-lo.

O oscilador tem um estado caracterizado pela posição x e velocidade v . Assim, rees-

crevendo a equação do oscilador temos:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\omega^2 x,\end{aligned}\tag{4.14}$$

onde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Assim, o sistema 4.14 pode ser interpretado por um campo vetorial no espaço de fase onde temos um vetor $(\dot{x}, \dot{v}) = (v, -\omega^2 x)$ para cada ponto (x, v) . A figura 4.3 representa o campo vetorial citado.

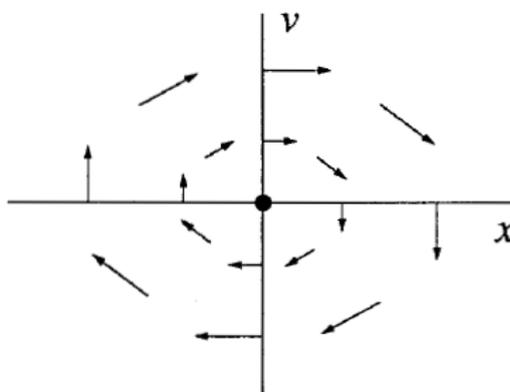


Figura 4.3: Campo vetorial do sistema

Assim, imaginando o campo vetorial como o fluxo de um determinado fluido, para determinarmos o retrato de fase, basta colocarmos uma determinada partícula no fluido e observar sua trajetória.

A origem do gráfico acima é um ponto de fase sem movimento pois $(\dot{x}, \dot{v}) = (0, 0)$ quando $(x, v) = (0, 0)$, de modo que a origem é um ponto fixo. Entretanto uma partícula se movendo nesse fluido a partir de qualquer local, eventualmente pode circular e retornar ao ponto inicial, de modo que tais trajetórias do gráfico são chamadas de órbitas fechadas conforme figura 4.4, o que também caracteriza um sistema conservativo.

Assim, podemos concluir que as órbitas fechadas correspondem ao movimento periódico do oscilador e a origem é o ponto de equilíbrio do sistema.

Outro exemplo é o sistema linear definido por $\dot{x} = Ax$, onde $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

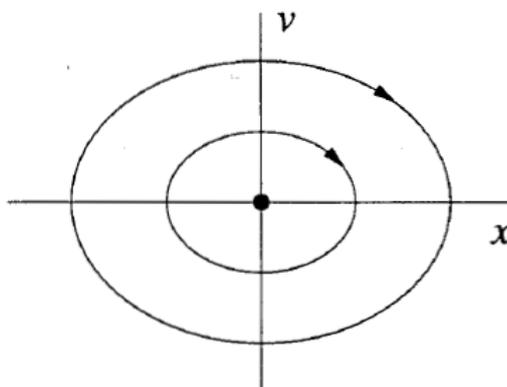


Figura 4.4: Retrato de fase do oscilador

Assim o sistema pode ser definido por

$$\dot{x} = ax \quad (4.15)$$

$$\dot{y} = -y, \quad (4.16)$$

o que nos mostra que as duas equações são desacopladas, de modo que podemos resolvê-las separadamente. As soluções são

$$x(t) = x_0 e^{at} \quad (4.17)$$

$$y(t) = y_0 e^{-t}. \quad (4.18)$$

Podemos obter retratos de fase diferentes com diferentes valores de a conforme Fig. 4.5. Em todos os casos, $y(t)$ decai exponencialmente. Quando $a < 0$, $x(t)$ também decai exponencialmente e todas as trajetórias vão em direção a origem com $t \rightarrow \infty$.

Na Figura 4.5a, temos que $a < -1$ o que faz com que $x(t)$ decaia mais rapidamente que $y(t)$. Neste caso o ponto fixo $x^* = 0$ é um nó estável.

Na Figura 4.5b temos que as taxas de decaimento são iguais para $x(t)$ e $y(t)$ e por isso temos linhas retas em direção a origem.

Quando $-1 < a < 0$ temos que $y(t)$ decai mais rapidamente que $x(t)$.

Na Figura 4.5d, quando $a = 0$ alguma mudança drástica ocorre de modo que $x(t) = x_0$ e temos uma linha inteira de pontos fixos no eixo x .

Quando $a > 0$ (Fig. 4.5e), x^* se torna instável devido ao crescimento exponencial na direção x . As trajetórias desviam de x^* e vão para o infinito. A exceção ocorre quando a trajetória começa no eixo y . Neste caso ela vai até a origem. Assim, $x^* = 0$ é o que

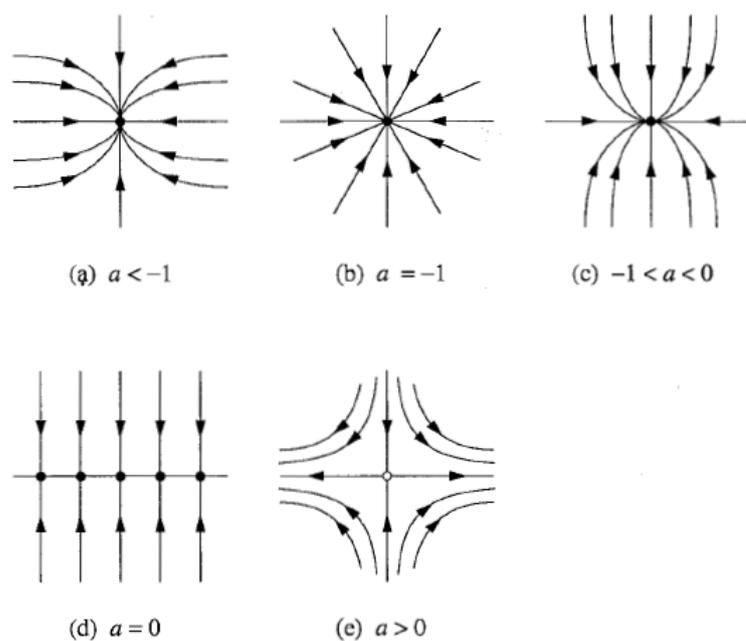


Figura 4.5: Retratos de fase

chamamos de ponto de sela.

Os pontos fixos das Figuras 4.5a-c, $x^* = 0$ é um ponto fixo de atração, visto que todas as trajetórias que começam próximas a x^* se aproximam com $t \rightarrow \infty$.

Dizemos ainda que um ponto fixo é neutramente estável se não há atração com o passar do tempo, entretanto a trajetória permanece próxima de onde começou (Figura 4.5d).

Um ponto ainda pode ser instável, uma vez que a trajetória diverge com o passar do tempo (Figura 4.5e).

4.2.2 Classificação de Sistemas Lineares

O último exemplo da seção anterior tem dois zeros em sua matriz A , entretanto precisamos generalizar em uma matriz 2×2 para podermos investigar todos os retratos de fase possíveis.

Para o caso geral procuramos trajetórias do tipo

$$x(t) = e^{\lambda t} \vec{v}, \quad (4.19)$$

onde $\vec{v} \neq 0$ é um vetor fixo a ser determinado, e λ a taxa de crescimento, também a ser determinada.

Para encontrarmos as condições em \vec{v} e λ , substituímos $x(t) = e^{\lambda t}v$ em $\dot{x} = Ax$, e obtemos $\lambda e^{\lambda t}v = e^{\lambda t}Av$, que nos diz que a solução existe se v é um autovetor de A com o correspondente autovalor λ .

De modo geral os autovalores de uma matriz são obtidos pela equação característica $\det(A - \lambda I) = 0$, onde I é a matriz identidade. Para uma matriz 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

de modo que a equação característica é

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = 0. \quad (4.21)$$

Expandindo o determinante temos

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0, \quad (4.22)$$

onde $\tau = \text{tr}(A) = a + d$ e $\Delta = \det(A) = ad - bc$.

Assim temos que as raízes(autovalores) são

$$\lambda_1 = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} \quad (4.23)$$

$$\lambda_2 = \frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}, \quad (4.24)$$

de modo que os autovalores dependem exclusivamente do traço e do determinante da matriz A .

Normalmente $\lambda_1 = \lambda_2$. Neste caso, um teorema da álgebra linear diz que os autovetores correspondentes v_1 e v_2 são linearmente independentes e abrangem todo o plano. Assim, qualquer condição inicial x_0 pode ser escrita como uma combinação linear de autovetores $x_0 = c_1v_1 + c_2v_2$.

Podemos escrever ainda a solução geral para $x(t)$

$$x(t) = c_1e^{\lambda_1 t}v_1 + c_2e^{\lambda_2 t}v_2. \quad (4.25)$$

Repare que a solução é uma combinação linear das soluções de $\dot{x} = Ax$ e que a mesma satisfaz a condição inicial $x(0) = x_0$.

Classificação dos Pontos Fixos

Como mostrado na seção anterior, para construirmos os retratos de fase dos sistema dinâmicos basta conhecer os autovalores e os autovetores. Entretanto há um diagrama que representa todos os retratos de fase possíveis utilizando apenas o traço e o determinante da matriz A (Fig. 4.6).

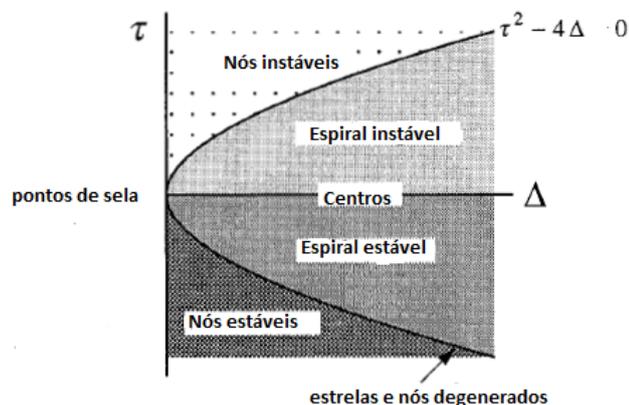


Figura 4.6: Traço x Determinante

Toda a informação do diagrama é retirada das fórmulas:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta} \right) \quad (4.26)$$

$$\Delta = \lambda_1 \lambda_2 \quad (4.27)$$

$$\tau = \lambda_1 + \lambda_2. \quad (4.28)$$

As seguintes observações são realizadas para o diagrama da Fig. 4.6: 1) Se $\Delta < 0$, os autovalores são reais e tem sinais opostos, então o ponto fixo é um ponto de sela.

2) Se $\Delta > 0$, os autovalores são reais com o mesmo sinal(nós), ou complexos conjugados (espirais e centros). A parábola $\tau^2 - 4\Delta = 0$ é a fronteira entre nós e espirais; estrelas e nós degenerados residem nessa parábola. A estabilidade dos nós e das espirais é determinada por τ . Quando $\tau < 0$, ambos os autovalores tem partes reais negativas, então o ponto fixo é estável. Espirais instáveis e nós tem $\tau > 0$. Centros estáveis residem onde $\tau = 0$ e os autovalores são puramente imaginários.

3) Se $\Delta = 0$, pelo menos um dos autovalores é zero. Assim, a origem não é um ponto fixo isolado e há uma linha ou um plano de pontos fixos, se $A = 0$.

A título de ilustração a Figura 4.7 mostra os vários tipos de retratos de fase dos sistemas citados no diagrama.

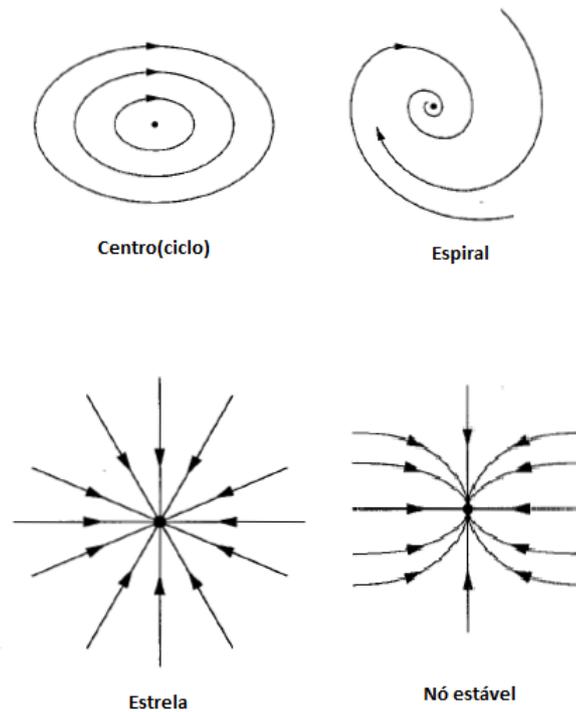


Figura 4.7: Retratos de fase

4.3 Plano de Fase

Nesta seção trataremos de sistemas não-lineares de duas dimensões utilizando para tanto o conhecimento das seções anteriores onde abordamos alguns conceitos para os sistemas lineares.

4.3.1 Retratos de Fase

A forma geral de um campo vetorial no plano de fase é

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \quad (4.29)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \quad (4.30)$$

onde f_1 e f_2 são funções dadas. O sistema pode ser escrito de forma mais compacta na notação vetorial como

$$\dot{x} = f(x), \quad (4.31)$$

onde $x = (x_1, x_2)$ e $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$. Aqui x representa um ponto no plano de fase, e \dot{x} é o vetor velocidade desse ponto. Fluindo ao longo do campo vetorial, um ponto de fase traça a solução $x(t)$, correspondendo a trajetória no plano de fase.

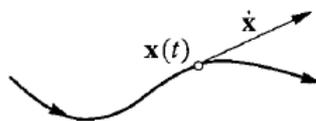


Figura 4.8: Trajetória

Para sistemas não-lineares, não há forma de encontrarmos as trajetórias de forma analítica, mesmo quando fórmulas explícitas estão disponíveis uma vez que elas são complicadas. Assim, temos que tentar o comportamento qualitativo das soluções. Podemos fazer isso tentando encontrar o retrato de fase diretamente das propriedades de $f(x)$. Nesses sistemas, há uma grande variedade de retratos de fase, um exemplo é a Fig. 4.9

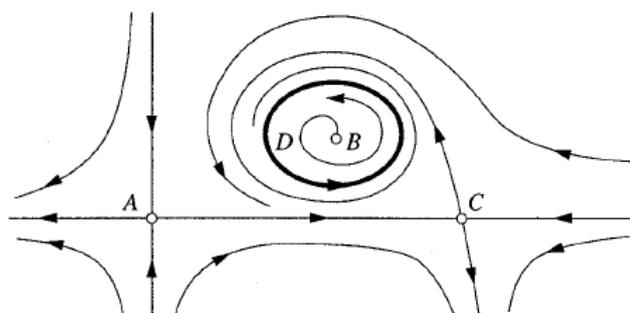


Figura 4.9: Retrato de fase

Devemos destacar algumas características que sempre devem ser analisadas em qualquer retrato de fase:

- Os pontos fixos, como A, B e C da Fig. 4.9. Pontos fixos satisfazem $f(x^*) = 0$, e correspondem a estados de equilíbrio do sistema.
- As órbitas fechadas, como D da Fig. 4.9. Elas correspondem a soluções periódicas.
- A organização das trajetórias perto dos ponto fixos. Os fluxos em A e B são parecidos, mas o fluxo em B é diferente.
- A estabilidade ou instabilidade dos pontos fixos e órbitas fechadas. Na Fig. 4.9 os pontos fixos A, B e C são instáveis visto que trajetórias próximas tendem a se afastar deles. A órbita fechada em D é estável.

Para resultados quantitativos podemos utilizar a integração numérica de $\dot{x} = f(x)$. Para isso utilizamos o método de Runge-Kutta conforme veremos no capítulo referente a simulação da dinâmica do ressonador em barra.

4.3.2 Pontos Fixos e Linearização

O processo de linearização nos permite determinar os pontos fixos e órbitas próximas a eles como um sistema linear.

Considere o sistema

$$\dot{x} = f(x, y) \quad (4.32)$$

$$\dot{y} = g(x, y), \quad (4.33)$$

e suponha que (x^*, y^*) é um ponto fixo, ou seja,

$$f(x^*, y^*) = 0, \quad g(x^*, y^*) = 0. \quad (4.34)$$

Seja $u = x - x^*$ e $v = y - y^*$ as componentes de pequenas perturbações próximas ao ponto fixo. Para verificarmos se a perturbação cresce ou decai, precisamos definir as equações diferenciais para u e v . Vejamos a equação de u :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{u} \\ &= f(x^* + u, y^* + v) \\ &= f(x^*, y^*) + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv) \\ &= u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Lembramos que as derivadas parciais na equação anterior devem ser avaliadas no ponto fixo (x^*, y^*) e que $O(u^2, v^2, uv)$ são termos quadráticos em u e v devido a expansão de Taylor na dedução anterior. Esses termos quadráticos são extramamente pequenos se considerarmos que u e v também são pequenos.

De forma similar temos em v

$$\dot{v} = u \frac{\partial g}{\partial x} + v \frac{\partial g}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv). \quad (4.36)$$

Assim a perturbação (u, v) evolui de acordo com

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + O(u^2, v^2, uv). \quad (4.37)$$

A matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x^*, y^*)}$$

é a matriz Jacobiana do ponto fixo (x^*, y^*) .

Como os termos quadráticos são muito pequenos, podemos retirá-los da equação e assim obtemos o sistema linearizado

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Lembramos que o sistema linearizado pode ser analisado com os autovalores, autovetores, traço e determinante, vistos na seção 4.2.2.

Voltando aos pequenos termos quadráticos desprezados na Eq.4.37, nos perguntamos: será que realmente tais termos não fazem diferença no retrato de fase? A resposta é que não fazem diferença desde que o ponto fixo para o sistema linearizado não seja um dos casos de fronteira da Fig. 4.6, ou seja, se o sistema linearizado indica uma espiral, um nó ou uma sela, então o ponto fixo é realmente um nó, espiral ou uma sela para o sistema não-linearizado [1].

Os casos de fronteira (centros, nós degenerados, estrelas) são mais delicados uma vez que podem ser alterados devido a pequenos termos não-lineares. Como exemplo para o caso, vejamos o seguinte sistema não-linear:

$$\dot{x} = -y + ax(x^2 + y^2) \quad (4.39)$$

$$\dot{y} = x + ay(x^2 + y^2), \quad (4.40)$$

onde a é um parâmetro.

O sistema pode ser linearizado simplesmente omitindo os termos não-lineares (ponto fixo na origem) com $\dot{x} = -y$ e $\dot{y} = x$ de modo que a jacobiana é

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.41)$$

que tem $\tau = 0$ e $\Delta = 1 > 0$, então a origem é sempre um centro de acordo com a linearização.

Entretanto podemos passar o sistema não-linearizado para coordenadas polares que fica da forma

$$\dot{r} = ar^3 \quad (4.42)$$

$$\dot{\theta} = 1, \quad (4.43)$$

Assim, vemos que as trajetórias dependem de a conforme Fig. 4.10

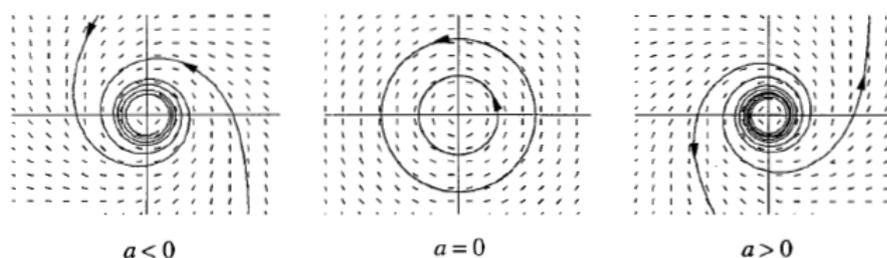


Figura 4.10: Retratos de fase

Se $a < 0$, então $r(t) \rightarrow 0$ com o passar do tempo. Neste caso a origem é uma espiral estável. Se $a = 0$, então $r(t) = r_0$ para todo t e a origem é um centro. Se $a > 0$, então $r(t) \rightarrow \infty$ e a origem é uma espiral instável.

Assim, vemos que qualquer perda em um sistema desse tipo transforma um centro em uma espiral. De modo similar estrelas e nós degenerados podem ser alterados por pequenas não-linearidades, entretanto sua estabilidade não se altera (uma espiral estável pode virar um estrela estável, mas nunca instável). Isto é facilmente visualizado na Fig. 4.6. Assim, chegamos a conclusão que os centros são os casos mais complicados pois vivem na fronteira entre a estabilidade e a instabilidade.

Se não estivermos interessados nas trajetórias, mas somente na estabilidade, podemos classificar os pontos fixos como:

Casos robustos

Fontes: Os dois autovalores tem parte real positiva.

Sorvedouros: ambos autovalores tem parte real negativa.

Selas: um autovalor positivo e um autovalor negativo

Casos Marginais

Centros: Ambos autovalores são puramente imaginários.

Pontos fixos não isolados: pelo menos um autovalor é igual a zero.

4.4 Ciclos Limite

Um ciclo limite é uma trajetória fechada isolada, de modo que a sua vizinhança não é fechada e sua espiral se aproxima ou se afasta do ciclo limite conforme 4.11.



Figura 4.11: Ciclos Limite

Se todas as vizinhanças se aproximam do ciclo limite dizemos que o ciclo limite é estável, caso contrário é instável, e em casos excepcionais semi-estável.

Ciclos limite estáveis são muito importantes, pois modelam sistemas que oscilam de forma sustentável.

Ciclos limite são naturalmente não-lineares e não podem ocorrer em sistemas lineares. É claro que um sistema linear pode ter órbitas fechadas, mas elas não serão isoladas; se $x(t)$ é uma solução periódica, então $cx(t)$ também é para qualquer constante $c \neq 0$. Assim, a amplitude da oscilação linear é definida somente pelas condições iniciais; qualquer perturbação se propagará indefinidamente. De modo diferente oscilações nos ciclos limite são determinadas pela estrutura do sistema.

Um exemplo de ciclo limite é o oscilador de van der Pol definido pela equação

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad (4.44)$$

onde $\mu \geq 0$ é um parâmetro. A Eq. 4.44 se parece com um oscilador harmônico, mas com um termo não-linear de amortecimento $\mu(x^2 - 1)\dot{x}$. Esse termo provoca o decaimento de altas amplitudes, mas também o aumento das amplitudes se ela se tornar muito pequena. Assim o sistema é autosustentável. Isto pode ser comprovado se plotarmos numericamente o plano de fase para $\mu = 1.5$ conforme Fig. 4.12

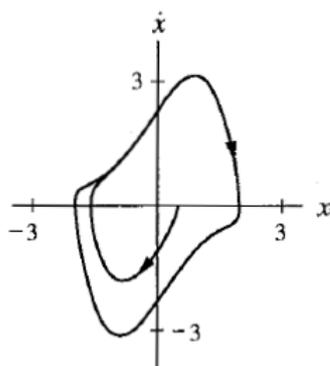


Figura 4.12: Plano de fase do oscilador de van der Pol

4.4.1 Teorema de Poincaré-Bendixson

Nesta seção iremos demonstrar métodos que provem a existência de órbitas fechadas em determinados sistemas. O teorema de Poincaré-Bendixson é uma das ferramentas nesse sentido.

Teorema de Poincaré-Bendixson: Suponha que: (1) R é um subconjunto limitado e fechado do plano; (2) $\dot{x} = f(x)$ é um campo vetorial continuamente diferenciável em um conjunto aberto contendo R ; (3) R não contém nenhum ponto fixo; (4) Existe uma trajetória C que é confinada em R , no sentido de que ela começa em R e permanece em R para todo o tempo t (Fig. 4.13).

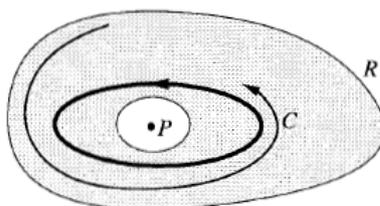


Figura 4.13: Subconjunto R e trajetória C

Então C é uma órbita fechada, ou uma espiral que se torna uma órbita fechada com $t \rightarrow \infty$. Em ambos os casos R contém uma órbita fechada. A demonstração do teorema com maiores detalhes pode ser vista em [15].

O resultado do Teorema de Poincaré-Bendixson se aplica somente a sistemas de duas dimensões, não sendo aplicado para sistemas de ordens maiores ($n \geq 3$). Para estes casos, algo novo acontece: as trajetórias podem evoluir no tempo em uma região limitada, sem se estabelecer num ponto fixo ou órbita fechada. As trajetórias demonstram que

não podemos prevê-las com o passar do tempo e que as mesmas são sensíveis as condições iniciais o que nos leva a definição de caos que será visto mais adiante. Assim, por exclusão, concluímos que Caos não ocorre em sistemas no plano.

4.5 Bifurcações

A palavra bifurcação foi introduzida na dinâmica não linear por Poincaré para indicar uma mudança qualitativa em determinado sistema como o número de soluções ou estados através da variação de **um ou mais parâmetros de controle** que no caso de MEMS e NEMS poderão ser tensões AC e DC, frequência, etc. Uma bifurcação será facilmente visualizada no retrato de fase se ocorrer uma mudança significativa em sua estrutura com a variação do parâmetro de controle.

Bifurcações de pontos fixos podem ser classificadas em estáticas e dinâmicas. As estáticas são divididas em: sela-nó, transcritical e forquilha. A bifurcação dinâmica é denominada bifurcação de Hopf. Iremos nos concentrar somente na Bifurcação de Hopf, uma vez que ela está sujeita a aparecer na modelagem numérica do ressonador.

4.5.1 Bifurcação de Hopf

Bifurcações estáticas nos levam a criação, destruição ou mudança de estabilidade dos pontos fixos. A bifurcação dinâmica de Hopf nos leva a criação de soluções periódicas através dos pontos fixos ao mesmo tempo que o parâmetro de controle é variado. Assim, ao invés de termos soluções de equilíbrio se encontrando no ponto de bifurcação, na bifurcação de Hopf teremos soluções de equilíbrio encontrando soluções periódicas.

Para obtermos a bifurcação de Hopf em um sistema dinâmico no ponto hipotético (X_0, μ_0) , as condições devem ser satisfeitas: (1) $F(X_0, \mu_0) = 0$, significando que esse ponto é um ponto fixo. (2) $\nabla_x F(X_0, \mu_0)$ (jacobiana) tem um par de autovalores puramente imaginários $(\pm i\omega)$ enquanto os demais autovalores tem partes reais diferentes de zero. (3) Os autovalores pouco antes de (X_0, μ_0) são da forma $\hat{\lambda} \pm i\omega$, então $\frac{d\hat{\lambda}}{d\mu}$ deve ter um valor diferente de zero em μ_0 .

Além dessas condições uma mudança dos pontos fixos em soluções periódicas precisa ser confirmada antes e depois de (X_0, μ_0) .

A bifurcação de Hopf pode ser do tipo supercrítica, onde a solução de equilíbrio perde estabilidade para duas novas soluções periódicas, ou subcrítica, onde uma solução de

equilíbrio estável coexiste com duas soluções instáveis e periódicas.

Um exemplo do Bifurcação de Hopf do oscilador de van der Pol da Eq. 4.44.

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad (4.45)$$

Para esse sistema temos que os autovalores, após o processo de linearização, são:

$$\lambda_1 = \mu + \sqrt{\mu^2 - 1} \quad (4.46)$$

$$\lambda_2 = \mu - \sqrt{\mu^2 - 1} \quad (4.47)$$

Assim, λ_1 e λ_2 sempre tem partes reais positivas para $\mu > 0$ indicando pontos fixos instáveis, e são sempre negativos para $\mu < 0$ indicando pontos fixos estáveis. Em $\mu = 0$, $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = -i$ que indica estabilidade neutra.

Podemos ver a bifurcação de Hopf para o oscilador de van der Pol através da Fig. 4.14 variando o parâmetro μ .

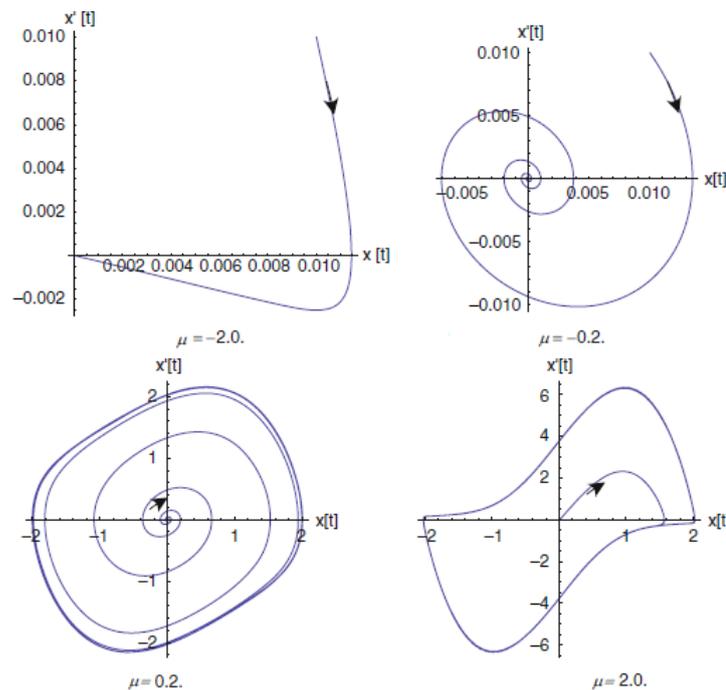


Figura 4.14: Espaço de Fase para o oscilador de van der Pol

Repare que para $\mu < 0$ o ponto fixo é estável. Para $\mu > 0$ o ponto fixo perde estabilidade para um movimento periódico e se torna um nó instável ou espiral instável.

4.6 Caos

O Teorema de Poincaré-Bendixson visto anteriormente tem como consequência que ao se incluir um dimensão extra ao sistema, as trajetórias podem evoluir no tempo numa região limitada sem se estabelecer num ponto fixo ou ciclo fechado. As trajetórias passam a ter um comportamento aperiódico e a serem sensíveis as condições iniciais o que nos leva a definição de caos.

A melhor definição para caos é o comportamento aperiódico de um sistema determinístico, sensível a condições iniciais, ou seja, duas condições iniciais muito próximas entre si divergem drasticamente com o passar do tempo.

O exemplo mais famoso do comportamento dessas trajetórias se deu com Edward Lorenz que descobriu nos idos dos anos 60 um sistema simplificado do modelo de convecção da atmosfera, as chamadas Equações de Lorenz [5].

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz,\end{aligned}\tag{4.48}$$

onde $\sigma, r, b > 0$ são parâmetros.

O sistema descoberto por Lorenz em (4.48) apesar da aparência determinística tem uma dinâmica errática. A variação dos parâmetros gera soluções irregulares que não se repetem, mas ficam restritas em uma região do espaço de fase. Isto caracteriza que o sistema é caótico e não aleatório[5]. Lorenz ainda obteve o espaço de fase tridimensional do seu sistema e descobriu que as trajetórias se comportavam em um conjunto complicado que ele chamou de atrator estranho, e viu que as soluções, após o transiente inicial, oscilavam de forma irregular o que persistia até $t \rightarrow \infty$, mas nunca se repetia, ou seja, o movimento é aperiódico. A trajetória no espaço de fase das soluções encontradas por Lorenz pode ser visualizada na Fig.4.15 numa seção de $x(t)$ por $z(t)$.

Ressalta-se que a trajetória da Fig.4.15 começa na origem e vai para o centro da espiral a esquerda, realiza algumas voltas e retorna para a exterior da espiral da direita, realizando mais algumas voltas e retornando mais uma vez para a espiral da esquerda, e assim indefinidamente de forma randômica.

Apesar do espaço de fase demonstrar um comportamento aperiódico, para aferirmos se um sistema é ou não caótico, temos que definir o expoente de Lyapunov e o Mapa de

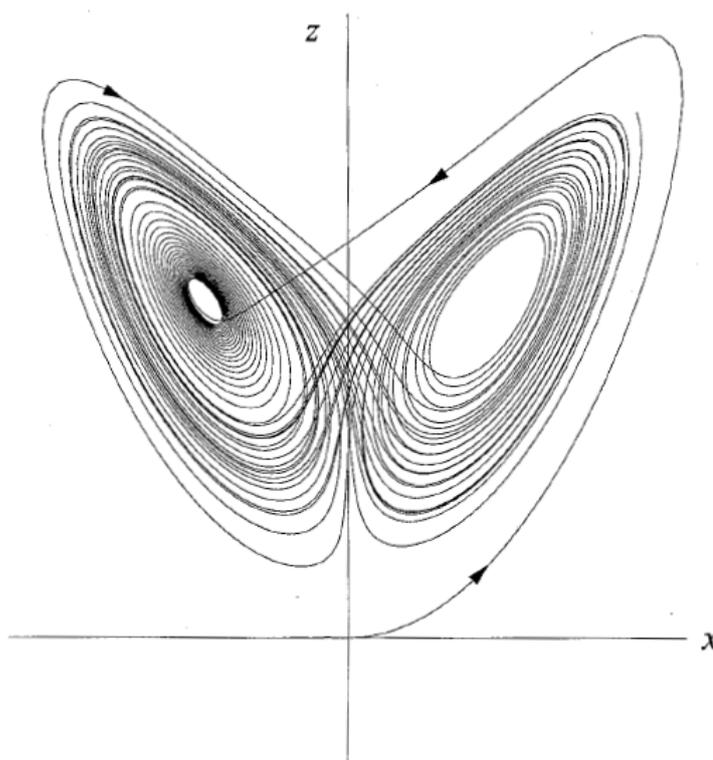


Figura 4.15: Atrator estranho de Lorenz

Poincaré que serão demonstrados em seções posteriores.

4.6.1 Mapas de uma dimensão

Mapas iterativos, conforme dito na introdução do capítulo, transformam o tempo em sistema dinâmico para a forma discreta ao invés de contínua. Um exemplo bem simples seria avaliarmos o seno de um número x_0 na calculadora e em seguida continuarmos apertando o seno sucessivamente para os resultados que forem apresentados na tela, de modo que teríamos um mapa unidimensional do tipo $x_{n+1} = \text{sen}(x_n)$. A sequência de resultados x_0, x_1, x_2, \dots é a órbita começando de x_0 .

No que se refere a caos, mapas são importantes uma vez que demonstram maior riqueza de detalhes do comportamento do sistema dinâmico do que equações diferenciais, onde trabalhamos com o fluxo contínuo. Outro importante fator é o fato de que por serem naturalmente discretos, os mapas podem ser facilmente simulados em computadores.

Pontos fixos Suponha que x^* satisfaça $f(x^*) = x^*$. Então x^* é um ponto fixo, se $x_n = x^*$ então $x_{n+1} = f(x_n) = f(x^*) = x^*$; assim a órbita permanece em x^* para todas as futuras iterações. Para determinarmos a estabilidade de x^* , considere um órbita próxima

$x_n = x^* + \eta_n$ e verificamos se a órbita é atraída ou repelida de x^* . A diferença η_n pode crescer ou decair com n aumentando. Substituindo temos

$$x^* + \eta_{n+1} = x_{n+1} = f(x^* + \eta_n) = f(x^*) + f'(x^*)\eta_n + O(\eta_n^2). \quad (4.49)$$

Mas $f(x^*) = x^*$, a equação se reduz a

$$\eta_{n+1} = f'(x^*)\eta_n + O(\eta_n^2). \quad (4.50)$$

Supondo que podemos desconsiderar os termos quadráticos ($O(\eta_n^2)$). Assim obtemos o mapa linearizado $\eta_{n+1} = f'(x^*)\eta_n$ com o autovalor $\lambda = f'(x^*)$. A solução do mapa é: $\eta_1 = \lambda\eta_0$, $\eta_2 = \lambda\eta_1 = \lambda^2\eta_0$, e em geral temos $\eta_n = \lambda^n\eta_0$. Se $|\lambda| = |f'(x^*)| < 1$, então $\eta_n \rightarrow 0$ com $n \rightarrow \infty$ e o ponto fixo x^* é linearmente estável. Caso $|f'(x^*)| > 1$ o ponto fixo é instável. Apesar de termos definido os dois casos, a linearização não nos diz nada sobre o caso marginal $|f'(x^*)| = 1$. Neste caso, os termos quadráticos $O(\eta_n^2)$ determinam a estabilidade local.

4.6.2 Mapa logístico

Robert May em 1976 [11] demonstrou que simples mapas não-lineares podiam ter uma dinâmica muito complicada como veremos a seguir. Seja o mapa logístico

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad (4.51)$$

um análogo da equação que define o crescimento da população. Na equação $x_n \geq 0$ é quantidade de indivíduos da população na n ésima geração e $r \geq 0$ é a taxa de crescimento da população.

O gráfico da Eq. 4.51 é uma parábola com o valor máximo $r/4$ em $x = \frac{1}{2}$ (Fig. 4.16).

Suponha que fixemos r com uma população inicial x_0 , e então usamos a Eq. 4.51 para obtermos os demais termos x_n . O que ocorre? Para uma taxa de crescimento da população $r < 1$, a população sempre é extinta: $x_n \rightarrow 0$ com $n \rightarrow \infty$.

Para $1 < r < 3$ a população cresce e atinge um estado estacionário conforme exemplo da Fig. 4.17.

O gráfico é uma série temporal dos pontos x_n ligados por linhas para $r = 2.8$.

Para r maiores, como por exemplo $r = 3.3$, a população oscila, alternando entre uma

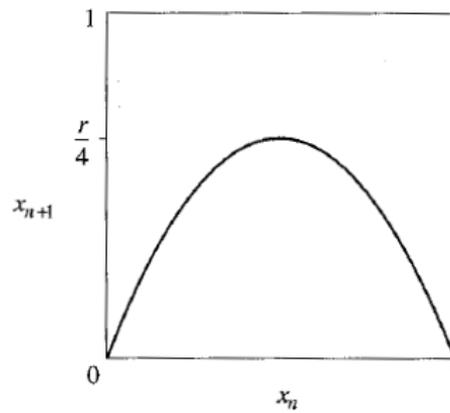
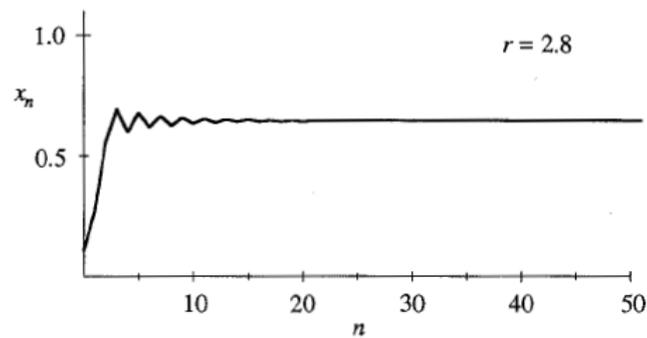


Figura 4.16: Parábola - Mapa Logístico

Figura 4.17: Série temporal do mapa logístico $r=2.8$

grande população em uma geração e uma pequena na próxima geração. Essa oscilação onde x_n se repete a cada 2 iterações é conhecido como dobra de período ou um ciclo de 2 períodos (Fig. 4.18).

Para um valor de r maior ainda, por exemplo $r = 3.5$ a população entra num ciclo onde a quantidade de indivíduos se repete a cada quatro gerações, ou seja mais uma dobra de período, nos levando a um período 4 (Fig. 4.19).

Mais dobradas de períodos ocorrem para ciclos de 8, 16, 32, ... a medida que r aumenta. Numericamente podemos obter mais dobradas de período e perceber que elas começam a

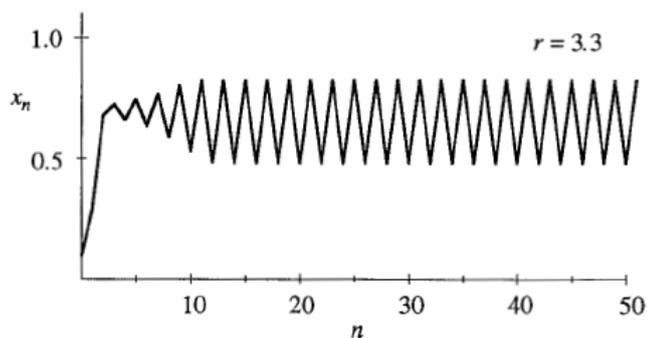


Figura 4.18: Série temporal do mapa logístico $r=3.3$

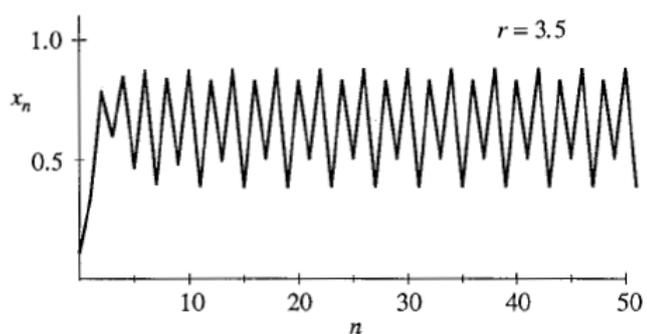


Figura 4.19: Série temporal do mapa logístico $r=3.5$

aparecer cada vez mais rápido

$r_1 = 3.000$	<i>periodo</i> 2
$r_2 = 3.449\dots$	<i>periodo</i> 4
$r_3 = 3.54409\dots$	<i>periodo</i> 8
$r_4 = 3.5644\dots$	<i>periodo</i> 16
\vdots	
$r_\infty = 3.569946\dots$	<i>periodo</i> ∞

Repare que o valor de r_n converge para um valor limite r_∞ .

Para vermos o comportamento do sistema para uma grande faixa de valores de r plotamos um diagrama onde para cada valor de r temos uma órbita com vários valores de x (Fig. 4.20).

Na região entre $3.4 \leq r \leq 4$ temos interessantes considerações a fazer. Em $r = 3.4$, o atrator tem um período 2, indicado por dois ramos. A medida que r aumenta mais ramos

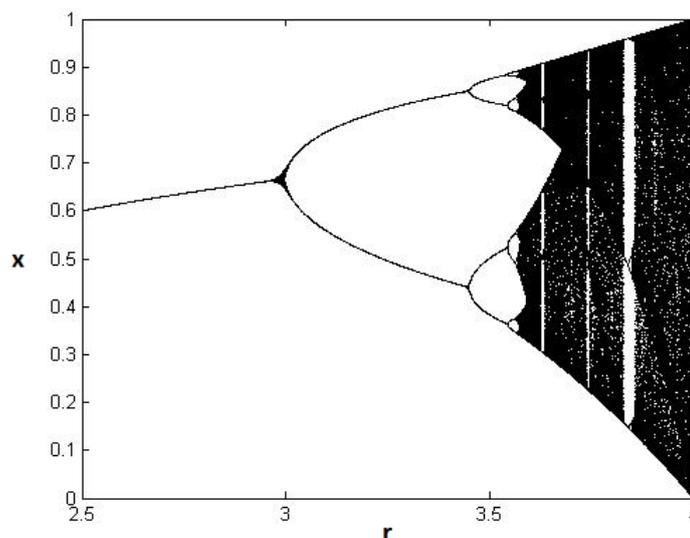


Figura 4.20: Diagrama de Bifurcação

vão sendo criados até $r = r_\infty \approx 3.57$, o mapa tem um comportamento aperiódico com grandes faixas de valores e o atrator passa a ter infinitos pontos.

Para $r > r_\infty$ o diagrama revela uma mistura de ordem e não periodicidade, com janelas periódicas entre partes com infinitos pontos distribuídos. Nota-se ainda que entre $3.8284... \leq r \leq 3.8415$ temos um período 3 no começo da janela periódica.

Em sistemas experimentais vemos que esta intermitência entre as janelas periódicas ocorre de forma distribuída, mas a medida que o parâmetro de controle aumenta e se afasta da janela periódica, ocorrem mais rajadas irregulares (janelas periódicas e caos) até que o sistema esteja totalmente caótico, o que chamamos de rota para o caos.

4.6.3 Expoente de Lyapunov

O Expoente de Lyapunov nada mais é do que um índice que verifica a sensibilidade do sistema em relação as condições iniciais, ou seja, se as órbitas de afastam exponencialmente.

Definição: Dada um condição inicial x_0 , considere um ponto próximo $x_0 + \delta_0$, onde a separação δ_0 é muito pequena. Seja δ_n a separação das órbitas após n iterações. Se $|\delta_n| = |\delta_0| \exp(n\lambda)$, então λ é chamado de expoente de Lyapunov. Caso o expoente seja positivo, temos que o sistema é caótico.

Utilizando logaritmos podemos chegar numa fórmula mais precisa conforme abaixo:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \quad (4.52)$$

É importante ressaltar que caso o expoente de Lyapunov seja negativo a condição inicial não diverge do ponto próximo com o passar do tempo o que caracteriza a ausência de caos. Caso o expoente seja positivo vemos que duas condições iniciais muito próximas divergem com o passar do tempo, ou seja, o sistema é sensível as condições iniciais, o que caracteriza um sistema caótico. Como exemplo temos o gráfico do expoente versus r para o caso do mapa logístico conforme Fig. 4.21.

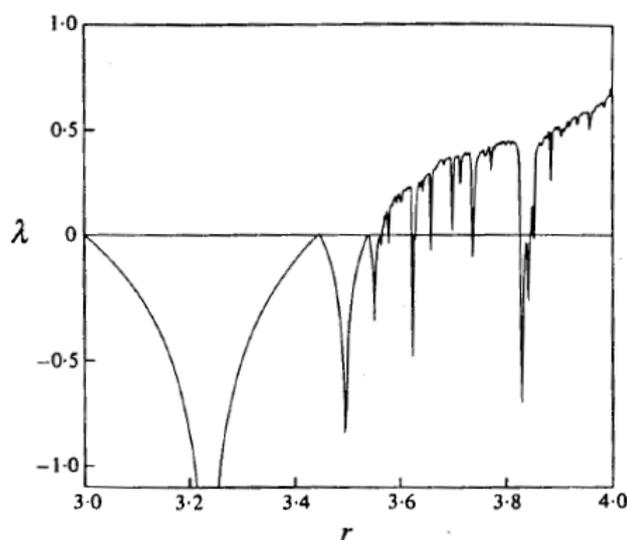


Figura 4.21: Expoente de Lyapunov para o mapa logístico

É importante ressaltar que a Eq. 4.52 serve para casos onde a função f é conhecida. Para casos contínuos onde f não é conhecida, temos que medir o afastamento das órbitas de duas condições iniciais próximas através de

$$\lambda_n = \frac{1}{t_n} \log \frac{|(x_n - x1_n)|}{|x_0 - x1_0|}, \quad (4.53)$$

onde x_n e $x1_n$ são as soluções de duas trajetórias próximas.

4.6.4 Expoente de Lyapunov utilizando o método de Wolf

Um método mais robusto para o cálculo do maior expoente de Lyapunov de uma série temporal foi desenvolvido em 1985 [19]. Neste método dada uma série temporal $x(t)$ procura-se um vizinho do ponto inicial $x(t_0)$ e denota-se a distância entre esses dois pontos

de $L(t_0)$. Em um tempo posterior t_1 , essa distância evolui para $L'(t_1)$. Essa distância é examinada ao longo da série temporal. Procura-se então, um novo ponto onde a distância entre ele e o ponto recolocado seja pequena, conforme Fig. 4.22. Este procedimento é repetido até que a trajetória original seja percorrida para todos os pontos da série. Para cada ponto então, estimamos o expoente de Lyapunov

$$\lambda = \frac{1}{t_m - t_0} \sum_{k=1}^M \log_2 \frac{L'(t_k)}{L(t_{k-1})}, \quad (4.54)$$

onde M é o número de passos de repetição.

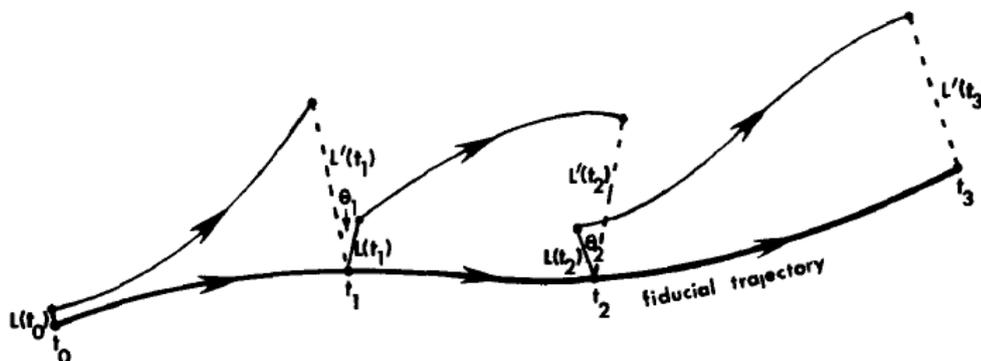


Figura 4.22: Procedimento de reposição para estimar os expoentes de Lyapunov. Fonte:[19]

4.6.5 Mapa de Poincaré

Mapas de Poincaré são úteis para verificação ou não de periodicidade em um sistema.

Considere assim um sistema n -dimensional $\dot{x} = f(x)$. Seja ainda S uma superfície de dimensão $n - 1$. Colocando-se a superfície de forma transversal ao fluxo do sistema temos que as trajetórias farão interseção com a superfície S marcando pontos.

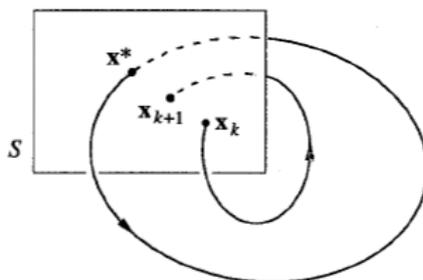


Figura 4.23: Mapa de Poincaré

Assim, se $x_k \in S$ representa a k -ésima interseção, o mapa de Poincaré é definido por:

$$x_{k+1} = P(x_k) \quad (4.55)$$

Logicamente vemos que se a órbita realiza a interseção sempre no mesmo ponto, o sistema é periódico, caso contrário o sistema é aperiódico podendo ser o regime caótico ou aleatório. A diferença entre um sistema aleatório e o caótico é que no primeiro a superfície S temos que a probabilidade da distribuição dos pontos é igual em qualquer lugar do espaço de fase. Já no padrão caótico a marcação dos pontos está restrita a uma região do espaço de fase.

Capítulo 5

Resultados para a dinâmica de Micro e Nanorressonadores

Neste capítulo apresentaremos e discutiremos os resultados da simulação numérica da dinâmica de um ressonador tipo barra suspensa nas escalas micro e nanométrica (Fig. 2.5) levando em consideração a não-linearidade geométrica, a força de atrito, a força eletrostática e a força de Casimir. A equação usada para modelar o sistema foi derivada nos capítulos anteriores

$$\ddot{s} + s + \alpha s^3 + \gamma \dot{s} + \frac{A}{240(1+s)^4} + \frac{B}{2(1+s)^2} = 0, \quad (5.1)$$

onde $A = \frac{\pi^2 h c b l}{k g^5}$, $B = \frac{\epsilon_0 V^2 b l}{k g^3}$ e $\alpha = 0.719(d/h)^2$.

Para geração dos resultados numéricos foi utilizado um notebook Apple Macbook Air com processador Intel Core i5-2557M, 4Gb de memória RAM e 128Gb de disco rígido de estado sólido. Utilizamos ainda o software Matlab2012b, sendo executado no sistema operacional Windows 7 (64 bits), para obtenção da solução da Equação do ressonador utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem e posterior plotagem dos retratos de fase para os parâmetros definidos.

O código gerado em Matlab foi previamente utilizado em um caso conhecido na literatura: o oscilador de Duffing. Para tal oscilador obtivemos as soluções no tempo e retrato de fase nos regimes periódico e caótico. Além disso, obtivemos o Expoente de Lyapunov em função de um dos parâmetros do oscilador. Uma vez verificado que o código elaborado funcionou corretamente utilizamos o mesmo para resolver a Eq. 5.1 para um microressonador e um nanorressonador, e posterior obtenção dos retratos de fase para verificação do comportamento do sistema sob certos parâmetros. Além disso, foi verificado a existência de caos através da análise dos retratos de fase, cálculo do maior expoente de Lyapunov e

o mapa de Poincaré.

5.1 Oscilador de Duffing

Em 1918, Georg Duffing considerou modelar oscilações forçadas utilizando para tanto várias equações diferenciais com o objetivo de reproduzir suas observações do comportamento das máquinas [4, 21]. Ele desejava modelar forças e atritos induzindo oscilações complicadas que eram observadas e prever tais comportamentos.

Duffing discute em seu trabalho [4] soluções analíticas e numéricas para a seguinte equação diferencial genérica, chamada de Equação de Duffing

$$\ddot{x} + a\dot{x} + \alpha x + \beta x^2 + x^3 = b.f(t), \quad (5.2)$$

onde $f(t)$ é uma função periódica que movimenta o sistema.

Dependendo das variações dos coeficientes temos interpretações físicas diferentes da equação. Na presente dissertação trataremos como oscilador de Duffing a equação de Duffing simplificada

$$\ddot{x} + a\dot{x} + x^3 = b.\cos(\omega t), \quad (5.3)$$

onde x e t são as variáveis dependentes e independentes, respectivamente, e a é o coeficiente de amortecimento do sistema, b a magnitude da função periódica e ω a frequência.

Um exemplo de um sistema que pode ser modelado pela Eq. 5.3 é um sistema mecânico que envolve uma fina barra de metal e dois ímãs presos a uma estrutura rígida conforme Fig. 5.1. A barra é suficientemente fina para que um ou outro ímã atraia a barra e a mesma seja deflecionada. A princípio a barra ficaria estabilizada em um ímã, entretanto a estrutura ainda está sujeita a um forçamento periódico que evita que a barra se estabilize em uma posição.

Para realizarmos a simulação numérica do oscilador de Duffing temos que tornar a Eq. 5.3 em um sistema autônomo na forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -ax_2 - x_1^3 + b.\cos(\omega t). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Conforme já dito anteriormente o oscilador de Duffing é um caso conhecido na literatura por seu comportamento caótico com certos parâmetros quando sujeito a um

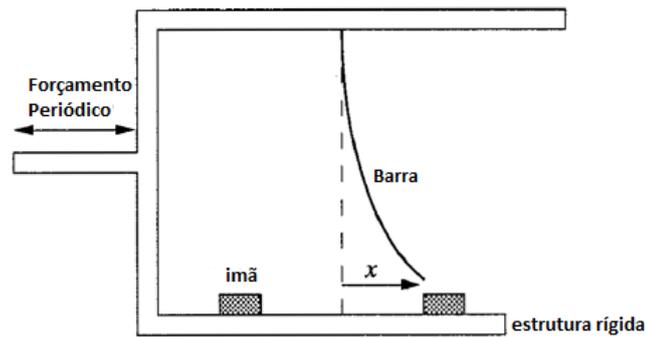
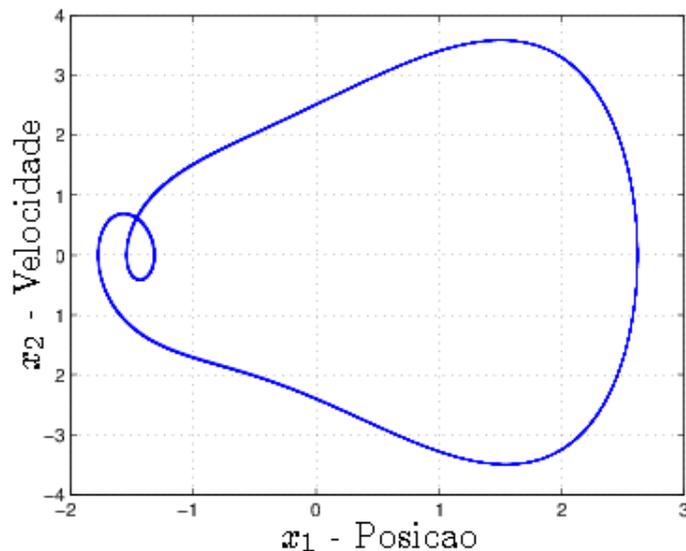


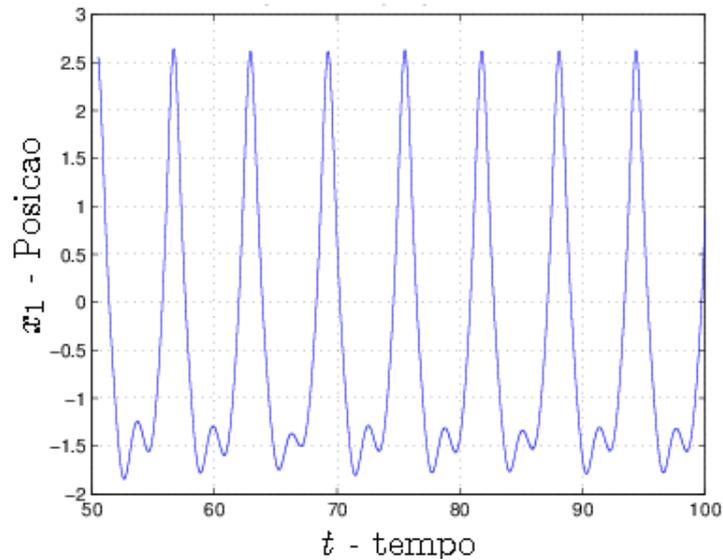
Figura 5.1: Oscilador de Duffing

forçamento, o que nos fornece uma ótima escolha para testar o algoritmo desenvolvido para solução da equação pelo método de Runge Kutta de Quarta ordem e cálculo do Expoente de Lyapunov.

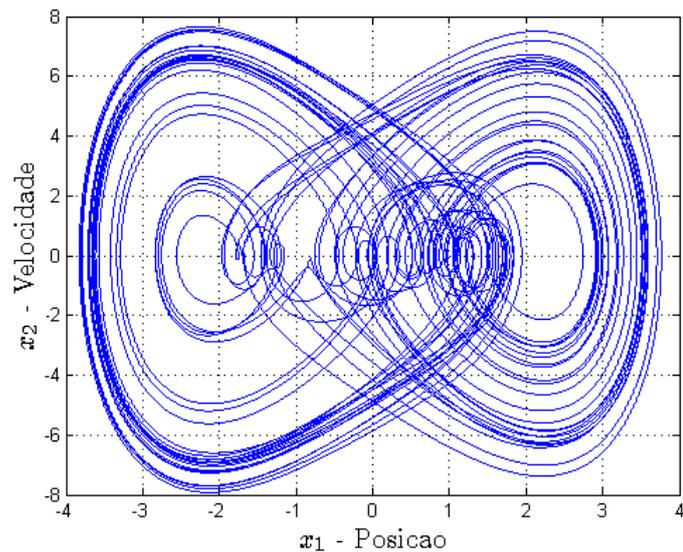
O regime periódico do sistema pode ser ilustrado resolvendo-se a Equação de Duffing definida na Eq. 5.4 pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem para $b = 4$, $a = 0.1$ e $\omega = 1$ de onde obtemos o retrato de fase e a solução no tempo nas Figs. 5.2 e 5.3. Nas Figuras do retrato de fase e da série temporal podemos observar um comportamento periódico do oscilador após o transiente inicial (não representado no gráfico).

Figura 5.2: Retrato de Fase: $a=0.1$ e $b=4$

Entretanto, à medida que aumentamos a magnitude da força periódica, tanto o retrato de fase quanto a série temporal mudam seus comportamentos. Podemos ver isso nos gráficos das Figs. 5.4 e 5.5 onde temos $a = 0.1$, $b = 11$ e $\omega = 1$. No retrato de fase vemos

Figura 5.3: Solução no tempo: $a=0.1$ e $b=4$

um comportamento, a princípio, caótico do sistema em virtude das duas bacias de atração apresentadas, de forma que não sabemos qual a convergência dos sistema. Na solução do sistema no tempo temos que não há repetição do período. Se o sistema realmente for caótico não haverá repetição do período quando $t \rightarrow \infty$.

Figura 5.4: Retrato de fase: $a=0.1$ e $b=11$

O problema de se analisar se um sistema é caótico ou não com a série temporal e o retrato de fase é o fato de que apesar de ambos aparentarem aperiodicidade, não temos como medir a sensibilidade as condições iniciais. Podemos fazer tal cálculo utilizando o

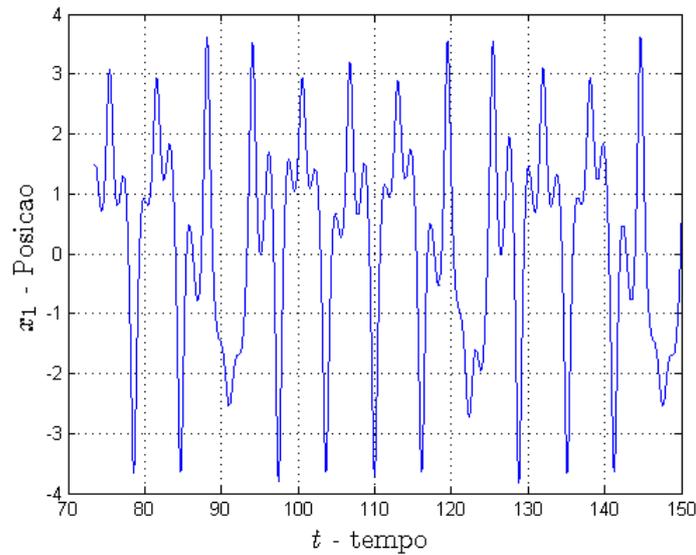


Figura 5.5: Solução no tempo: $a=0.1$ e $b=11$

expoente de Lyapunov, onde o mesmo deve ser positivo no caso do regime caótico. Assim, foi elaborado o gráfico da Fig. 5.6 onde no eixo x temos o valor da magnitude da força periódica b e no eixo y temos o expoente de Lyapunov λ para o valor do coeficiente de amortecimento $a = 0.1$.

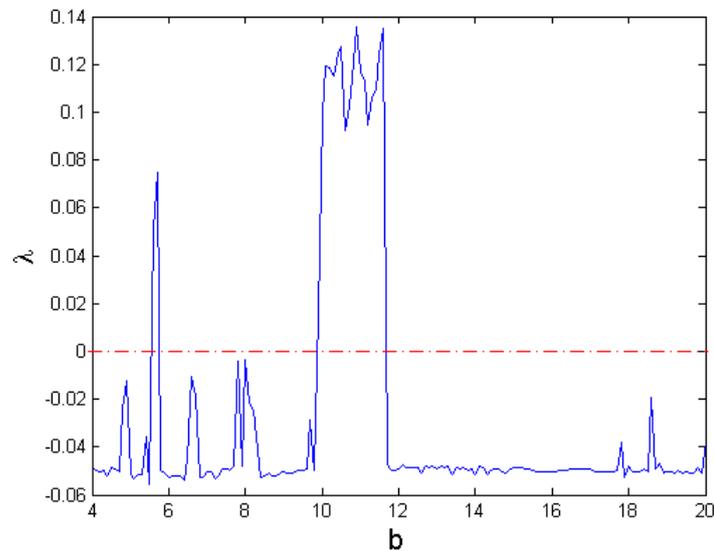


Figura 5.6: Expoente de Lyapunov para $a = 0.1$ e $\omega = 1$

Vemos na Fig. 5.6 que o expoente de Lyapunov é negativo para $b = 4$ e positivo para $b = 11$, vindo a confirmar os comportamentos periódico e caótico obtidos nos retratos de fase das Figs. 5.2 e 5.4, respectivamente, e está de acordo com o obtido por [21]. Vale

ressaltar que para o cálculo do Expoente de Lyapunov temos que calcular a solução do sistema pelo método de Runge-Kutta de Quarta Ordem milhares de vezes, uma vez que utilizamos o Método de Wolf[19]. A utilização das rotinas existentes no Matlab 2012b para solução das equações pelo método de Runge Kutta, como por exemplo a *ode45*, se mostraram ineficientes do ponto de vista computacional, uma vez que chamavam várias subrotinas, o que nos levava a um tempo de processamento muito alto. O problema foi resolvido através da implementação de uma rotina de Runge-Kutta de Quarta Ordem sem a chamada de subrotinas (no programa principal) o que resultou numa drástica redução no tempo de processamento para o cálculo do Expoente de Lyapunov.

Para confirmarmos o comportamento caótico do oscilador de Duffing para $a = 0.1$ e $b = 11$ podemos gerar o Mapa de Poincaré para $\omega = 1$. Se o comportamento do oscilador for periódico teremos somente um ponto no mapa de Poincaré ou órbitas fechadas. Caso tenhamos pontos espalhados uniformemente pelo mapa o sistema é aleatório. Entretanto o Mapa de Poincaré gerado tem um padrão diferente como pode ser visto na Fig.5.7. Pode-se observar que os pontos do mapa tem um padrão e estão concentrados em uma determinada região o que qualitativamente caracteriza um padrão dos sistemas caóticos.

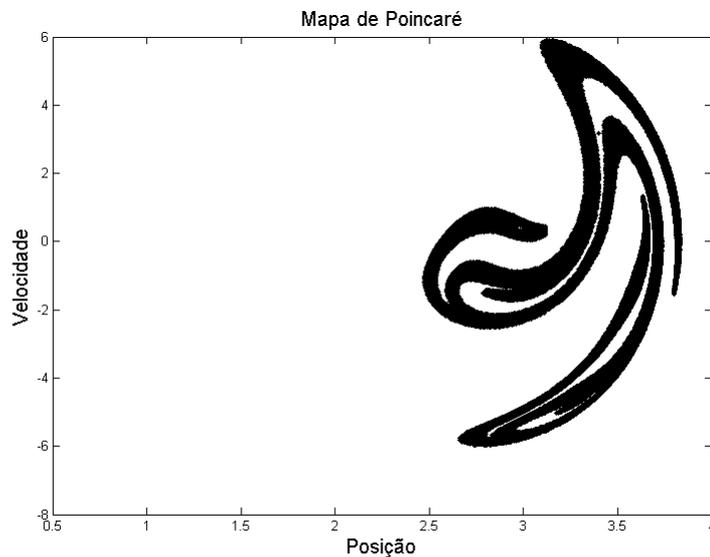


Figura 5.7: Mapa de Poincaré para $a = 0.1$, $b = 11$ e $\omega = 1$

Os resultados obtidos (mapa de fase, expoente de Lyapunov e Mapa de Poincaré) nos levam a confirmação do comportamento caótico para $a = 0.1$, $b = 11$ e $\omega = 1$ do Oscilador de Duffing conforme bem conhecido na literatura [21].

5.2 Modelagem numérica de um microressonador

Na presente seção iremos apresentar os resultados obtidos através da simulação numérica de um microressonador sob a ação das forças de Casimir e eletrostática, além da inclusão dos efeitos de amortecimento e não-linearidade geométrica. Nesse sentido alguns trabalhos já foram publicados como [10] e [17]. Em ambos os trabalhos a força de Casimir foi levada em consideração, entretanto a não-linearidade geométrica, o efeito de forças dissipativas e o forçamento não foram incluídos.

Um trabalho mais recente [3] e mais robusto em relação aos anteriores utilizou uma variação do método de elementos finitos, o Finite Cloud Method(FCM) para solução da equação de movimento da barra e posterior apresentação dos retratos de fase. Em [3] efeitos como a não-linearidade geométrica e o amortecimento devido ao ar/fluido utilizando a equação de Reynolds foram utilizados. Entretanto a força de Casimir não foi levada em consideração.

Na presente dissertação como mostrado na Eq. 5.1 levamos em consideração os efeitos da força de Casimir e a não linearidade geométrica. Em relação ao trabalho realizado em [3] a força de Casimir foi incluída na equação da barra e o método de Galerkin permitiu um cálculo do Expoente de Lyapunov com vários parâmetros diferentes, uma vez que o custo computacional do método é baixo quando comparado ao método de elementos finitos utilizado em [3]. Entretanto, em [3] efeitos como o amortecimento devido ao ar/fluido e os efeitos da curvatura da barra quando deflecionada foram tratados.

Um vez testado o código elaborado com o Oscilador de Duffing, realizamos a simulação numérica da Eq. 5.1 para um microressonador em ponte feito de silício com as seguintes dimensões fixas $l = 80\mu m$, $b = 10\mu m$, $h = 1\mu m$ e distância entre o substrato e a barra $d = 1\mu m$, conforme Fig. 5.8. Além disso, o coeficiente de atrito foi fixado em $\gamma = 0.1$. Lembramos que o sistema está sujeito a uma força eletrostática na forma $F(x) = \frac{\epsilon b V^2}{2(d-w(x))^2}$, onde $V^2 = [V_{DC} + V_{AC}\cos(\Omega t)]^2$. É desse termo que temos a origem do forçamento que será considerado na modelagem do microressonador. Ressaltamos ainda, que para efeitos de comparação, as dimensões utilizadas para o microressonador foram as mesmas da Ref. [3].

Considerando, num primeiro momento, os seguintes parâmetros $V_{AC} = 5.1V$, $V_{DC} = 63V$, $\Omega = 0.15$ temos que o retrato de fase obtido (Fig. 5.9) nos revela um comportamento periódico devido ao ciclo fechado obtido.

Entretanto, se variarmos os parâmetros do sistema podemos obter retratos de fase

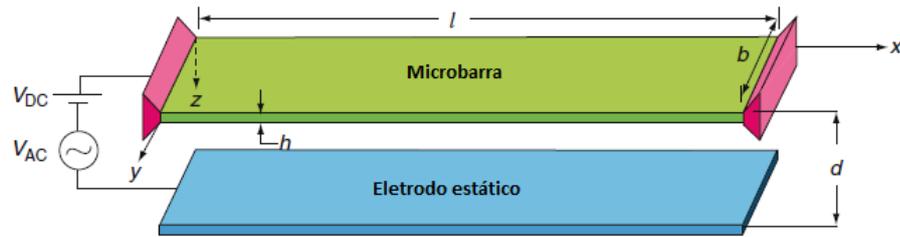
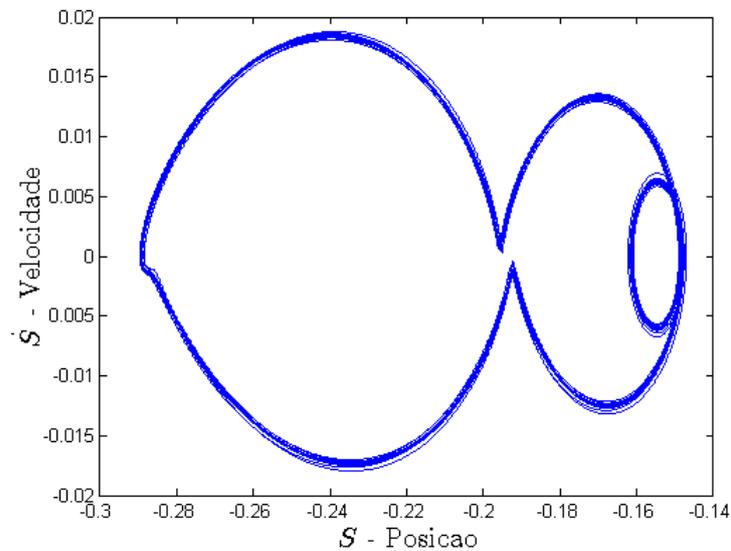


Figura 5.8: Microressonador em ponte

Figura 5.9: Retrato de fase para $V_{AC} = 5.1V$, $V_{DC} = 63V$ e $\Omega = 0.15$

diferentes. Um exemplo disso é se variarmos as tensões V_{AC} e V_{DC} , e a frequência Ω para os valores: $V_{AC} = 7.43V$, $V_{DC} = 62.8V$ e $\Omega = 0.244$. O gráfico do retrato de fase obtido é o da Fig. 5.10 que nos revela a princípio um comportamento caótico, visto que o retrato de fase obtido varia entre uma faixa de valores. É importante ressaltar aqui que a componente AC da força eletrostática é a responsável pela geração do caos conforme observado por [3]. Para confirmação de se tratar de um regime caótico do sistema o expoente de Lyapunov para o caso se mostrou positivo nos resultados obtidos.

Com o intuito de investigar os valores onde o sistema apresenta comportamento caótico calculamos o expoente de Lyapunov variando os parâmetros da seguinte forma: $V_{AC} = 4$ a $7V$ com passos de $0.01V$, $V_{DC} = 60V$ a $68V$ com passos de $0.1V$ e $\Omega = 0.1$ a 0.4 com passos de 0.05 . Para cada conjunto de valores obtivemos um valor do expoente de Lyapunov. Caso o mesmo seja positivo temos que o sistema é caótico, caso seja negativo o sistema não é caótico. Há ainda de se tomar as devidas precauções para que as condições

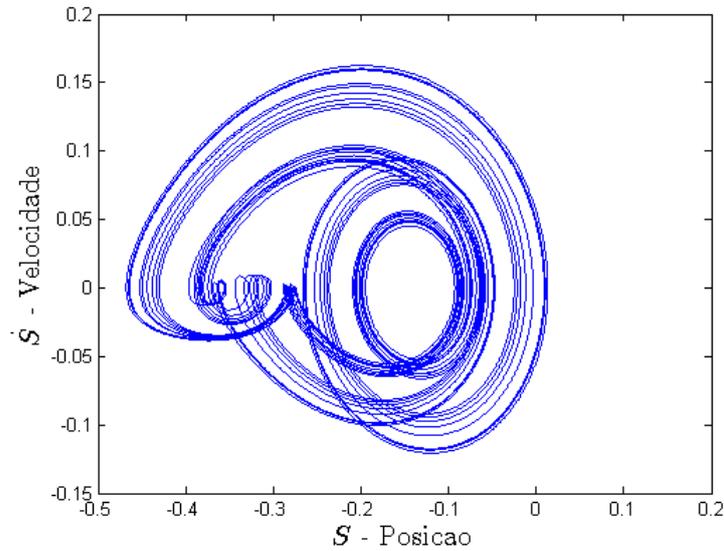


Figura 5.10: Retrato de fase para $V_{AC} = 7.43V$, $V_{DC} = 62.8V$ e $\Omega = 0.244$

iniciais (posição e velocidade) em conjunto com cada grupo de parâmetros não induza a microbarra ao pull in, evento que ocorre quando a microbarra toca no substrato do microressonador e não retorne a oscilar. Para isso, também variamos as condições iniciais do sistema, de acordo com cada grupo de parâmetros (V_{AC} , V_{DC} e Ω). Assim, para $\Omega = 0.15$ por exemplo, temos que a faixa de expoentes positivos se comporta como no gráfico de V_{AC} por V_{DC} da Fig. 5.11. Obtivemos ainda os valores positivos do expoente de Lyapunov por V_{AC} conforme Fig. 5.12.

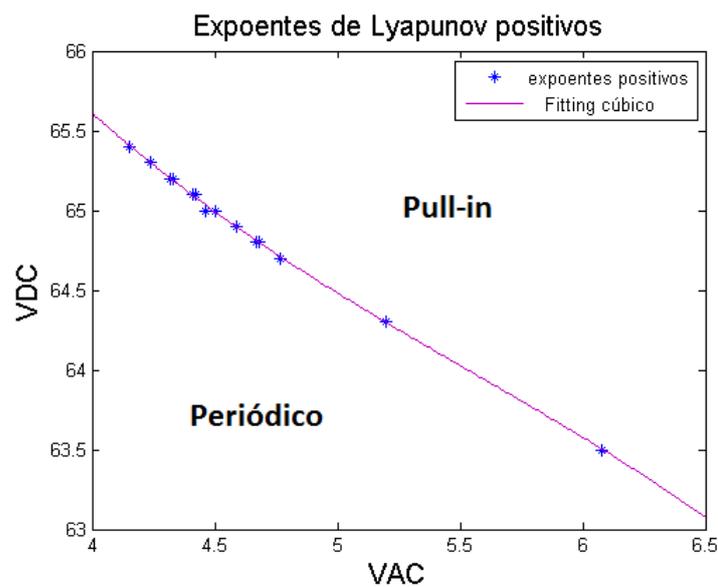


Figura 5.11: Faixa de expoentes de Lyapunov positivos

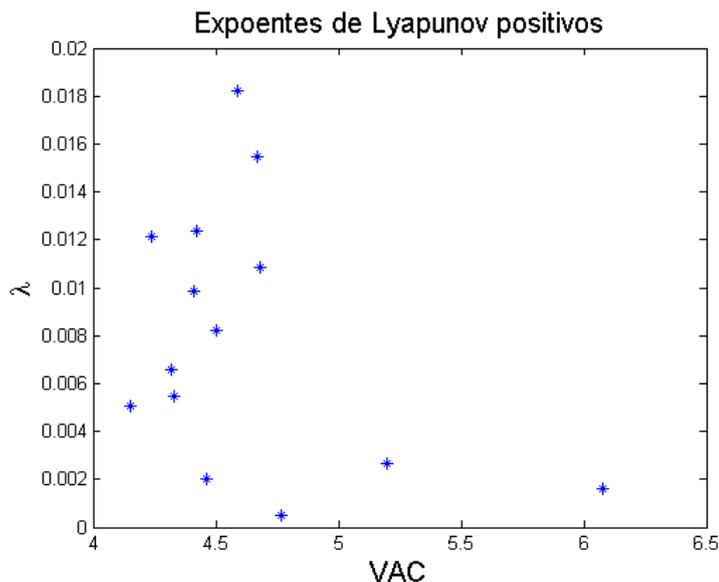


Figura 5.12: Faixa de expoentes de Lyapunov positivos

Os valores positivos do expoente de Lyapunov nos mostram que sob certos parâmetros o sistema tem comportamento caótico. É importante ressaltar que, conforme já visto por [3], os regimes caóticos ocorrem em uma estreita faixa de parâmetros próxima a região do pull-in conforme pode ser observado na Fig. 5.11. É importante frisar que na Fig. 5.11 a linha que separa a região do pull-in com a do regime periódico na verdade é uma faixa onde ocorre o regime caótico. Por último, para confirmação do comportamento caótico do sistema, coletamos um grupo de parâmetros com o expoente positivo ($V_{AC} = 7.43V$, $V_{DC} = 62.8V$ e $\Omega = 0.244$) para obtenção do Mapa de Poincaré da Fig. 5.13. Caso o regime do sistema fosse periódico teríamos, conforme já dito, somente um ponto no mapa de Poincaré ou órbitas fechadas. Pontos espalhados uniformemente pelo mapa temos que o sistema é aleatório. Pelo padrão do gráfico e com uma distribuição de pontos em uma dada região podemos dizer qualitativamente que o sistema tem comportamento caótico, restando para a confirmação quantitativa do regime o cálculo da dimensão fractal que não será abordado aqui.

5.3 Modelagem Numérica do Nanoressonador

Utilizando ainda a Eq. 5.1 modelamos um nanoressonador com as seguintes dimensões $l = 8\mu m$, $w = 1\mu m$, $h = 0.1\mu m$, distância entre o substrato e a barra de $50nm$, e coeficiente de atrito $\gamma = 0.2$. Considerando que agora a distância entre o substrato e a barra é de $50nm$ temos que a força de Casimir tem um importante papel na dinâmica do

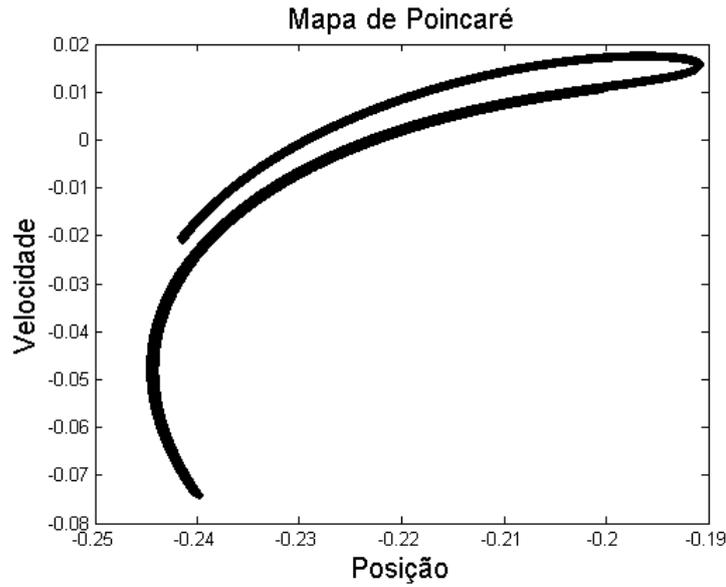


Figura 5.13: Mapa de Poincaré

dispositivo o que nos leva a introduzir o fator de correção da força de Casimir[6], válido para distâncias entre 0 e 200nm, e a ser utilizado no termo da força de Casimir da equação de movimento da barra

$$\eta = (c_1 + c_2 ds + c_3(ds)^2 + c_4(ds)^3 + c_5(ds)^4 + c_6(ds)^5 + c_7(ds)^6 + c_8(ds)^7), \quad (5.5)$$

onde $c_1 = 0.0005297265469440053$, $c_2 = 1.0994136137999801 \times 10^7$, $c_3 = -2.6136581513110462 \times 10^{14}$, $c_4 = 4.1553420959230586 \times 10^{21}$, $c_5 = -4.147668426656723 \times 10^{28}$, $c_6 = 2.445440269316712 \times 10^{35}$, $c_7 = -7.716603562718351 \times 10^{41}$, $c_8 = 9.999736398378438 \times 10^{47}$ e d é a distância do substrato até a barra.

Para os valores de $V_{AC} = 0.1405V$, $V_{DC} = 2.245V$ e $\Omega = 0.2685$ temos o gráfico da Fig. 5.14.

Observamos que para esses valores o regime do nanoressonador tem um comportamento periódico, fato este confirmado pela obtenção do Expoente de Lyapunov no valor de $\lambda = -0.099290$.

Com o intuito de verificarmos a importância da força de Casimir para o nanoressonador realizamos uma comparação da equação de movimento da barra com a força de Casimir e sem a força de Casimir para os mesmos valores da Fig. 5.14, ou seja, $V_{AC} = 0.1405V$, $V_{DC} = 2.245V$ e $\Omega = 0.2685$. No gráfico obtido, conforme Fig. 5.15, em azul temos a solução da equação de movimento da barra com a força de Casimir e o fator de correção. Em vermelho temos a solução da equação da barra sem a força de Casimir, demonstrando

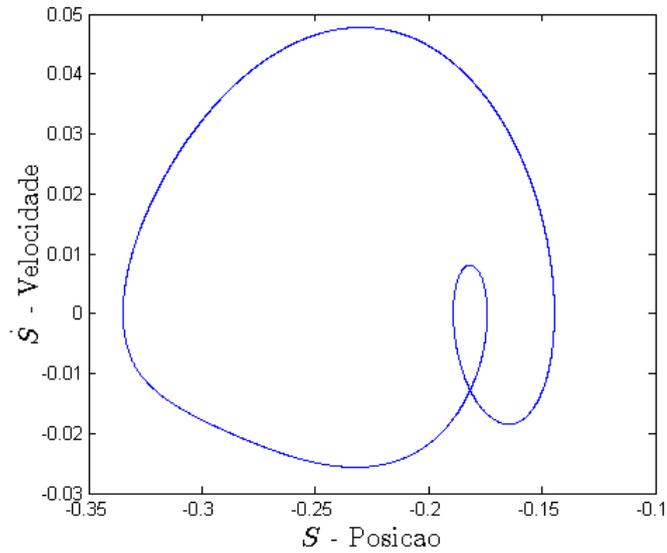


Figura 5.14: Retrato de fase para $V_{AC} = 0.1405V$, $V_{DC} = 2.245V$ e $\Omega = 0.2685$

a importância em se considerar a força de Casimir na simulação de NEMS.

É importante ressaltar que com uma análise qualitativa vemos a princípio que temos dois regimes distintos na Fig.5.15: Com a força de Casimir (em azul) temos um comportamento periódico conforme já demonstrado no cálculo do expoente de Lyapunov anteriormente, e sem a força de Casimir (em vermelho) temos um regime caótico. Confirmamos nossas expectativas com a obtenção do Expoente de Lyapunov positivo $\lambda = 0.013801$ para o caso da solução da equação de movimento da barra sem a força de Casimir.

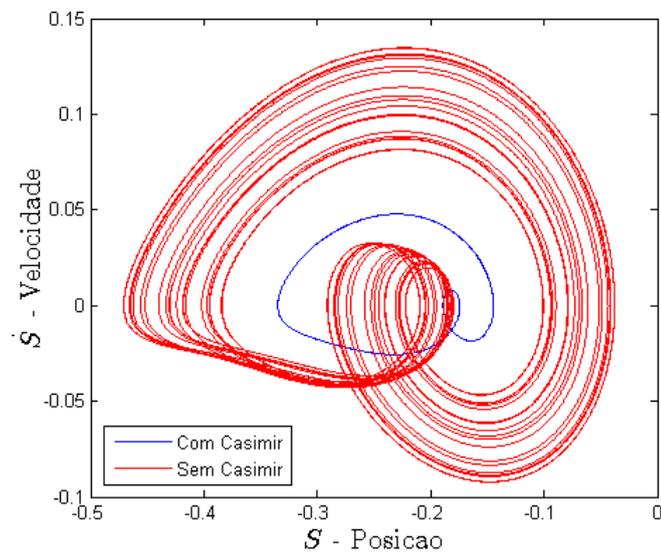


Figura 5.15: Comparação com a força de Casimir e sem a força de Casimir para $V_{AC} = 0.1405V$, $V_{DC} = 2.245V$ e $\Omega = 0.2685$

Capítulo 6

Conclusões e Trabalhos Futuros

6.1 Conclusões

Neste trabalho apresentamos a modelagem analítica e numérica de um micro e um nanoressonador em barra suspensa sob a ação da força de Casimir.

No que tange aos resultados numéricos foi gerado um código em Matlab para a solução da equação de movimento do ressonador pelo método de Runge-Kutta de Quarta Ordem, plotagem dos retratos de fase e análise destes com as ferramentas da Dinâmica Não-Linear apresentadas no Cap. 5.

O código gerado foi testado primeiramente em um caso conhecido na literatura, o oscilador de Duffing, e posteriormente aplicamos o mesmo código na equação de movimento do microressonador definido no Cap. 4. Com a solução da equação de movimento do microressonador plotamos os retratos de fase para alguns grupos de parâmetros. Na variação dos parâmetros tensão AC e DC, e frequência, vimos que o microressonador pode ter um comportamento caótico, o que é altamente indesejável para a fabricação e operação desse tipo de dispositivo, fato pelo qual a modelagem numérica é de suma importância como etapa preparatória à fabricação de microdispositivos permitindo a criação de novos dispositivos e o aprimoramento dos já existentes.

Foi mostrado ainda a relevância da Força de Casimir para NEMS com a modelagem de um nanoressonador e a comparação do retrato de fase da solução da equação de movimento da barra com e sem a força de Casimir.

6.2 Trabalhos Futuros

A continuação do presente trabalho seria a aplicação do método de Galerkin nas Forças de Casimir e Eletrostática na equação de movimento da barra, de modo que a deflexão do microressonador (curvatura da barra) seja levada em consideração para efeitos de cálculo das forças envolvidas, não reduzindo o microressonador a um capacitor de placas paralelas. Além disso, podemos citar a investigação da faixa de expoentes de Lyapunov positivos para ressonadores na escala nanométrica (nanorressonadores).

APÊNDICE A

Código em Matlab para a obtenção do retrato de fase do microressonador

```

clc ; clear ;
passo=10^-2;%passo de tempo para o Runge Kutta
h=passo ;
ti=0; %tempo inicial
tf=1000; %tempo final
trans=(tf-ti)/(2*passo);%transiente
o=1;n=1;z=1;pp=1; %contadores
Sol1=zeros(((tf-ti)/passo),2);%vetor solução com zeros

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% PARÂMETROS DO RESSONADOR %%%%%%%%%%
E=170*10^9;%módulo de elasticidade do silício
ro=2.3*10^3; %densidade do silício
w=10*10^-6;%Largura
d=10^-6;%espessura
lc=80*10^-6; %comprimento
g=10^-6; %gap
m=0.767*ro*w*d*lc;%massa da ponte
hcort=1.05457148*10^-34; %constante de Planck sobre 2pi
c=299792458;%velocidade da luz no vácuo
epsilon=8.854238837*10^-12;%permissividade vácuo
VAC=7.43; %voltagem ac
VDC=62.8; %voltagem dc
eta=0.244; %frequencia
beta=0.1; %coeficiente de atrito viscoso
alfa=0.719*(g/d)^2;
I=(w*d^3)/12; %Momento de Inércia

```

```

kef=(384*E*I)/(lc^3); %K efetivo
a=(pi^2)*hcort*c*w*lc/(kef*g^5); %Razão entre a força de Casimir e
    as forças restauradoras
b=(epsilon*w*lc*VDC^2)/(kef*g^3); %Razão entre a força
    eletrostática DC e as forças restauradoras
ce=(epsilon*w*lc*VAC^2)/(2*kef*g^3); %Razão entre a força
    eletrostática AC e as forças restauradoras

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% CONDIÇÕES INICIAIS %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
f=epsilon*lc*w*VDC*VAC/g^2;
F=f/(g*kef);
x1 = 0;
y1 = -0.2139;
tp=ti;

Sol1(1,:)=[y1,x1];
j=1;
o=1;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% ROTINA DE RUNGE KUTTA %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for i=tp:passo:tf

    o=o+1;
    k1 = -y1 -alfa*(y1)^3 -beta*x1 - a/(240*(1+y1)^4) - b/(2*(1+y1)
        )^2) - (ce*(cos(eta*ti))^2)/(1+y1)^2 + F*cos(eta*ti)/(1+y1)
        ^2;
    l1 = x1;
    k2 = -(y1+h*l1/2) -alfa*(y1+h*l1/2)^3 -beta*(x1+h*k1/2) - a
        /(240*(1+y1+h*l1/2)^4) - b/(2*(1+y1+h*l1/2)^2) - (ce*(cos(
        eta*(ti+h/2)))^2)/(1+y1+h*l1/2)^2 + F*cos(eta*(ti+h/2))/(1+
        y1+h*l1/2)^2;
    l2 = x1+h*k1/2;
    k3 = -(y1+h*l2/2) -alfa*(y1+h*l2/2)^3 -beta*(x1+h*k2/2) - a
        /(240*(1+y1+h*l2/2)^4) - b/(2*(1+y1+h*l2/2)^2) - (ce*(cos(
        eta*(ti+h/2)))^2)/(1+y1+h*l2/2)^2 + F*cos(eta*(ti+h/2))/(1+
        y1+h*l2/2)^2;

```

```

l3 = x1+h*k2/2;
k4 = -(y1+h*l3) - alfa*(y1+h*l3)^3 - beta*(x1+h*k3) - a/(240*(1+
    y1+h*l3)^4) - b/(2*(1+y1+h*l3)^2) - (ce*(cos(eta*(ti+h)))
    ^2)/(1+y1+h*l3)^2 + F*cos(eta*(ti+h))/(1+y1+h*l3)^2;
l4 = x1+h*k3;
k = (k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
l = (l1+2*l2+2*l3+l4)/6;
x1 = x1 + h*k;
y1 = y1 + h*l;

Sol1(o,:)=[y1,x1];

ti=ti+passo;

end

%%%%%%%%%% PLOTAGEM DO RETRATO DE FASE %%%%%%%%%%%
figure(1);
plot(Sol1(trans:2*trans,1),Sol1(trans:2*trans,2));
title('Espaço_de_Fase','fontsize',15);
xlabel('Posição','fontsize',15);
ylabel('Velocidade','fontsize',15);

```

APÊNDICE B

Código em Matlab para procura de Expoentes de Lyapunov positivos

```

clc ; clear ;
tic ;
tstart2=tic;%marca tempo de processamento inicial
passo=10^-2;%passo de tempo para o Runge Kutta
h=passo ;
ti=0; %tempo inicial
tf=1000; %tempo final
trans=(tf-ti)/(2*passo);%transiente
lambda=zeros(1,((tf-ti)/passo)+1); %vetor que guarda os expoentes
    de Lyapunov
lyapunov=zeros(301,81,7);
o=1;
n=1;z=1;pp=1;
Sol1=zeros(((tf-ti)/passo),2);%vetor solução para a 1 condição
    inicial
Sol2=zeros(((tf-ti)/passo),2);%vetor solução para a 2 condição
    inicial
positivo=zeros(10000,4); %vetor para os expoentes positivos

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% PARÂMETROS DO RESSONADOR %%%%%%%%%%

E=170*10^9;%módulo de elasticidade do silício
ro=2.3*10^3; %densidade do silício
w=10*10^-6;%Largura
d=10^-6;%espessura
lc=80*10^-6; %comprimento

```

```

g=10^-6; %gap
m=0.767*ro*w*d*lc;%massa da ponte
hcort=1.05457148*10^-34;%constante de Planck sobre 2pi
c=299792458;%velocidade da luz no vácuo
epsilon=8.854238837*10^-12;%permissividade vácuo
VDC=65.2; %voltage dc
VAC=4.412;%voltage ac
beta=0.01; %coeficiente de atrito
alfa=0.719*(g/d)^2;
I=(w*d^3)/12; %momento de inércia
kef=(384*E*I)/(lc^3); %K efetivo
a=(pi^2)*hcort*c*w*lc/(kef*g^5); %Razão entre a força de Casimir e
    as forças restauradoras
b=(epsilon*w*lc*VDC^2)/(kef*g^3); %Razão entre a força
    Eletrostática DC e as forças restauradoras
ce=(epsilon*w*lc*VAC^2)/(kef*g^3); %Razão entre a força
    Eletrostática AC e as forças restauradoras
f=epsilon*lc*w*VDC*VAC/g^2;
F=f/(g*kef);
eta=0.1; %frequencia
q=1;

%%%%%% INTERPOLAÇÃO DAS COND. INICIAIS PARA NÃO HAVER PULL IN
    %%%%%%

interpol_VDC=(0.2846-0.1710)/81;%interpolacao para variar a
    condição inicial de y entre -0.2846 e -0.1710 no VDC
interpolacao(1)=-0.1710;
for zz=2:81
    interpolacao(zz)=interpolacao(zz-1)-interpol_VDC;
end

%%%%% VARIACAO DOS PARAMETROS PARA PROCURA DE EXPOENTES DE
    LYAPUNOV POSITIVOS %%%%%%

for VAC=4:0.01:7 %Variação da tensão AC

```

```

p=1;
ce=(epsilon*w*lc*VAC^2)/(2*kef*g^3);

for VDC=60:0.1:68 %Variação da tensão DC
f=epsilon*lc*w*VDC*VAC/g^2;
F=f/(g*kef);
b=(epsilon*w*lc*VDC^2)/(kef*g^3);
n=1;

for eta=0.1:0.05:0.4 %Variação da frequencia
ti=0;
tf=1000;
x1 = 0;
y1 = interpolacao(p) - 0.0009;
x2 = 0;
y2 = -0.15;
tp=ti;

d0=sqrt((y1-y2)^2 + (x1-x2)^2); %distancia entre as condições
    iniciais
Sol1(1,:)=[y1,x1];
Sol2(1,:)=[y2,x2];
j=1;
o=1;
tic;
tstart=tic;%marca tempo de processamento inicial

%%%%%%%%% ROTINA DE RUNGE-KUTTA PARA AS 2 CONDIÇÕES INICIAIS %%%%%%%%%%

for i=tp:passo:tf

    %s=y1    y=x1
    o=o+1;
    k1 = -y1 - alfa*(y1)^3 - beta*x1 - a/(240*(1+y1)^4) - b/(2*(1+y1)
        )^2) - (ce*(cos(eta*ti))^2)/(1+y1)^2 + F*cos(eta*ti)/(1+y1)
        ^2;

```

```

l1 = x1;
k2 = -(y1+h*l1/2) - alfa*(y1+h*l1/2)^3 - beta*(x1+h*k1/2) - a
      /(240*(1+y1+h*l1/2)^4) - b/(2*(1+y1+h*l1/2)^2) - (ce*(cos(
      eta*(ti+h/2)))^2)/(1+y1+h*l1/2)^2 + F*cos(eta*(ti+h/2))/(1+
      y1+h*l1/2)^2;
l2 = x1+h*k1/2;
k3 = -(y1+h*l2/2) - alfa*(y1+h*l2/2)^3 - beta*(x1+h*k2/2) - a
      /(240*(1+y1+h*l2/2)^4) - b/(2*(1+y1+h*l2/2)^2) - (ce*(cos(
      eta*(ti+h/2)))^2)/(1+y1+h*l2/2)^2 + F*cos(eta*(ti+h/2))/(1+
      y1+h*l2/2)^2;
l3 = x1+h*k2/2;
k4 = -(y1+h*l3) - alfa*(y1+h*l3)^3 - beta*(x1+h*k3) - a/(240*(1+
      y1+h*l3)^4) - b/(2*(1+y1+h*l3)^2) - (ce*(cos(eta*(ti+h)))
      ^2)/(1+y1+h*l3)^2 + F*cos(eta*(ti+h))/(1+y1+h*l3)^2;
l4 = x1+h*k3;
k = (k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
l = (l1+2*l2+2*l3+l4)/6;
x1 = x1 + h*k;
y1 = y1 + h*l;

Sol1(o,:)=[y1,x1];

k11 = -y2 - alfa*(y2)^3 - beta*x2 - a/(240*(1+y2)^4) - b/(2*(1+
      y2)^2) - (ce*(cos(eta*ti))^2)/(1+y2)^2 + F*cos(eta*ti)/(1+
      y2)^2;
l11 = x2;
k22 = -(y2+h*l11/2) - alfa*(y2+h*l11/2)^3 - beta*(x2+h*k11/2) -
      a/(240*(1+y2+h*l11/2)^4) - b/(2*(1+y2+h*l11/2)^2) - (ce*(
      cos(eta*(ti+h/2)))^2)/(1+y2+h*l11/2)^2 + F*cos(eta*(ti+h/2)
      )/(1+y2+h*l11/2)^2;
l22 = x2+h*k11/2;
k33 = -(y2+h*l22/2) - alfa*(y2+h*l22/2)^3 - beta*(x2+h*k22/2) -
      a/(240*(1+y2+h*l22/2)^4) - b/(2*(1+y2+h*l22/2)^2) - (ce*(
      cos(eta*(ti+h/2)))^2)/(1+y2+h*l22/2)^2 + F*cos(eta*(ti+h/2)
      )/(1+y2+h*l22/2)^2;
l33 = x2+h*k22/2;

```

```

k44 = -(y2+h*133) - alfa*(y2+h*133)^3 - beta*(x2+h*k33) - a
      /(240*(1+y2+h*133)^4) - b/(2*(1+y2+h*133)^2) - (ce*(cos(eta
      *(ti+h)))^2)/(1+y2+h*133)^2 + F*cos(eta*(ti+h))/(1+y2+h*133
      )^2;
l44 = x2+h*k33;
kk = (k11+2*k22+2*k33+k44)/6;
l1 = (l11+2*l22+2*l33+l44)/6;
x2 = x2 + h*kk;
y2 = y2 + h*l1;
Sol2(o,:)=[y2,x2];

ti=ti+passo;

%%%% CÁLCULO DO EXP. DE LYAPUNOV %%%
d1=sqrt((Sol1(o,2)-Sol2(o,2))^2 + (Sol1(o,1)-Sol2(o,1))^2); %
      distância entre os dois pontos após um passo de tempo
lambda(j)=(1/passo)*log(abs(d1/d0));
if j>trans
lyapunov(q,p,n)=lyapunov(q,p,n) + lambda(j);
end
j=j+1;
y2=y1 + (d0/d1)*(y2-y1); %novo ponto cond. 1 - método de wolff
x2=x1 + (d0/d1)*(x2-x1); %novo ponto cond. 2 - método de wolff
end

tend=toc(tstart);%marca tempo final de processamento
lyapunov(q,p,n)=lyapunov(q,p,n)/(length(lambda)-trans);
fprintf('%f\n',lyapunov(q,p,n));
if lyapunov(q,p,n)>0 && verdadeiro==1
    positivo(z,:)=[VAC,VDC,eta,lyapunov(q,p,n)];
    z=z+1;
end
fprintf('VAC=%f , VDC=%f , eta=%f\n',VAC,VDC,eta);
n=n+1;

```

```
end
p=p+1;
end
q=q+1;
end

tend2=toc(tstart2);%marca tempo final de processamento
fprintf( '\n_Tempo_de_processamento_total:_%f_minutos\n',tend2/60);
```

APÊNDICE C

Código em Matlab para a obtenção do retrato de fase do nanoressonador

```

clc ; clear ;
tic ;
tstart2=tic;%marca tempo de processamento inicial
passo=10^-2;%passo de tempo para o Runge Kutta
h=passo ;
ti=0;%Tempo Inicial
tf=1000; %Tempo final
trans=(tf-ti)/(2*passo);%transiente
o=1;
n=1;z=1;pp=1;
Sol1=zeros(((tf-ti)/passo),2);%vetor solução

%%%%%%%%%% PARÂMETROS DO RESSONADOR %%%%%%%%%%%
E=170*10^9;%módulo de elasticidade do silício
ro=2.3*10^3; %densidade do silício
w=1*10^-6;%Largura
d=0.1*10^-6;%espessura
lc=8*10^-6; %comprimento
g=50*10^-9; %gap
m=0.767*ro*w*d*lc;%massa da ponte
hcort=1.05457148*10^-34; %constante de Planck sobre 2pi
c=299792458;%velocidade da luz no vácuo
epsilon=8.854238837*10^-12;%permissividade vácuo
VAC=0.1669; %voltagem ac
VDC=2.204; %voltagem dc
eta=0.1535 %frequência

```

```

beta=0.2; % coeficiente de atrito
alfa=0.719*(g/d)^2;
I=(w*d^3)/12; %momento de inércia
kef=(384*E*I)/(lc^3); %K efetivo
a=(pi^2)*hcort*c*w*lc/(kef*g^5); %Razão entre a força de Casimir e
    as forças restauradoras
b=(epsilon*w*lc*VDC^2)/(kef*g^3); %Razão entre a força de
    Eletrostática DC e as forças restauradoras
ce=(epsilon*w*lc*VAC^2)/(2*kef*g^3); %Razão entre a força de
    Eletrostática AC e as forças restauradoras

%%%%%%%%% FATOR DE CORREÇÃO DA FORÇA DE CASIMIR %%%%%%%%%%
c1=0.0005297265469440053; %coeficientes do fator de correção
c2=1.0994136137999801*(10^7);
c3=-2.6136581513110462*(10^14);
c4=4.1553420959230586*(10^21);
c5=-4.147668426656723*(10^28);
c6=2.445440269316712*(10^35);
c7=-7.716603562718351*(10^41);
c8=9.999736398378438*(10^47);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
f=epsilon*lc*w*VDC*VAC/g^2;
F=f/(g*kef);
x1 = 0; %Condição Inicial
y1 = -0.3; %Condição Inicial
tp=ti;
Sol1(1,:)=[y1,x1];
j=1;
o=1;
tic;
tstart=tic;%marca tempo de processamento inicial

%%%%%%%%% ROTINA DE RUNGE KUTTA %%%%%%%%%%

for i=tp:passo:tf

```

```

f_cor1=(c1 + c2*g*y1 + c3*(g*y1)^2 + c4*(g*y1)^3+ c5*(g*y1)^4+
        c6*(g*y1)^5 + c7*(g*y1)^6 + c8*(g*y1)^7);
k1 = -y1 -alfa*(y1)^3 -beta*x1 - (a*f_cor1)/(240*(1+y1)^4) - b
    /(2*(1+y1)^2) - (ce*(cos(eta*ti))^2)/(1+y1)^2 + F*cos(eta*
    ti)/(1+y1)^2;
l1 = x1;
k2 = -(y1+h*l1/2) -alfa*(y1+h*l1/2)^3 -beta*(x1+h*k1/2) - (a*
    f_cor1)/(240*(1+y1+h*l1/2)^4) - b/(2*(1+y1+h*l1/2)^2) - (ce
    *(cos(eta*(ti+h/2))))^2)/(1+y1+h*l1/2)^2 + F*cos(eta*(ti+h
    /2))/(1+y1+h*l1/2)^2;
l2 = x1+h*k1/2;
k3 = -(y1+h*l2/2) -alfa*(y1+h*l2/2)^3 -beta*(x1+h*k2/2) - (a*
    f_cor1)/(240*(1+y1+h*l2/2)^4) - b/(2*(1+y1+h*l2/2)^2) - (ce
    *(cos(eta*(ti+h/2))))^2)/(1+y1+h*l2/2)^2 + F*cos(eta*(ti+h
    /2))/(1+y1+h*l2/2)^2;
l3 = x1+h*k2/2;
k4 = -(y1+h*l3) -alfa*(y1+h*l3)^3 -beta*(x1+h*k3) - (a*f_cor1)
    /(240*(1+y1+h*l3)^4) - b/(2*(1+y1+h*l3)^2) - (ce*(cos(eta*(
    ti+h))))^2)/(1+y1+h*l3)^2 + F*cos(eta*(ti+h))/(1+y1+h*l3)^2;
l4 = x1+h*k3;
k = (k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
l = (l1+2*l2+2*l3+l4)/6;
x1 = x1 + h*k;
y1 = y1 + h*l;

Sol1(o,:)=[y1,x1];

ti=ti+passo;

end

tend=toc(tstart);%marca tempo final de processamento

%%%%%%%%%% %%%PLOTAGEM DO GRÁFICO %%%

figure(1);

```

```
plot(Sol1(trans:2*trans,1),Sol1(trans:2*trans,2));
xlabel('$S$-Posicao','interpreter','latex','fontsize',15);
ylabel('$\dot{S}$-Velocidade','interpreter','latex','fontsize',15);
tend2=toc(tstart2);%marca tempo final de processamento
fprintf('\n_Tempo_de_processamento_total:_%f_minutos\n',tend2/60);
```

Referências

- [1] ANDRONOV, A. A., LEONTOVICH, E. A., GORDON, I. I., MAIER, A. G. *Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems*, 1 ed. Wiley, New York, 1973.
- [2] DE, S. K., ALURU, N. R. Complex oscillations and chaos in electrostatic microelectromechanical systems under superharmonic excitations. *Physical Review Letters* 94 (2005), 204101.
- [3] DE SUDIPTO, K., ALURU, N. R. Complex nonlinear oscillations in electrostatically actuated microstructures. *Journal of Microelectromechanical Systems* 15 (2006), 355–368.
- [4] DUFFING, G. *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung*, 1 ed. Sammlung Vieweg, Heft 41/42, 1918.
- [5] GLEICK, J. *Chaos: Making a New Science*, 1 ed. Penguin Books, 2008.
- [6] GUSSO, A., DELBEN, J. G. Dispersion force for materials relevant for micro- and nanodevices fabrication. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 41 (2008), 175405.
- [7] ILIC, B., CRAIGHEAD, H., KRYLOV, S., SENARATNE, W., OBER, C., NEUZIL, P. Attogram detection using nanoelectromechanical oscillators. *Journal of Applied Physics* 95 (2003), 3694.
- [8] I.YOUNIS, M. *MEMS Linear and Nonlinear Statics and Dynamics*, 1 ed. Springer, 2010.
- [9] LIFSHITZ, E. The theory of molecular attractive forces between solids. *Sov. Phys.* 2 (1956), 73.
- [10] LIN, W.-H., ZHAO, Y.-P. Nonlinear behavior for nanoscale electrostatic actuators with casimir force. *Chaos, Solitons and Fractals* 23 (2005), 1777–1785.
- [11] MAY, R. M. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature* 261 (1976), 459.
- [12] MEIROVITCH, L. *Fundamentals of Vibrations*, 1 ed. McGraw Hill, 2001.
- [13] MILLONI, P. W. *The Quantum Vacuum*, 1 ed. Academic Press, 1994.
- [14] NGUYEN, C. T.-C. Mems technology for timing and frequency control. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* 54 (2007), 251.
- [15] PERKO, L. *Differential Equations and Dynamical Systems*, 1 ed. Springer, 1991.

-
- [16] POURKAMALI, S., HASHIMURA, A., ABDOLVAND, R., HO, G. K., ERBIL, A., AYAZI, F. High-q single crystal silicon harpss capacitive beam resonators with self-aligned sub-100-nm transduction gaps. *Journal of Microelectromechanical Systems* 12 (2003), 487–496.
- [17] SERRY, F. M., WALISER, D., MACLAY, G. J. The anharmonic casimir oscillator(aco) - the casimir effect in a model microelectromechanical system. *Journal of Microelectromechanical Systems* 4 (1995), 193–205.
- [18] STROGATZ, S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos*, 1 ed. Perseus Books, 1994.
- [19] WOLF, A., SWIFT, J. B., SWINNEY, H. L., VASTANO, J. A. Determining lyapunov exponents from a time series. *Physica 16D* (1985), 285–317.
- [20] WONG, A.-C., NGUYEN, C. T.-C. Micromechanical mixer-filters (mixlers). *Journal of Microelectromechanical Systems* 13 (2004), 100.
- [21] ZENI, A. R., GALLAS, J. A. Lyapunov expoents for a duffing oscillator. *Physica D* 89 (1995), 71–82.